Prof. Dr. M. Spieß

9. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 12.1.06

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a) mit dem Gaußschen Algorithmus,

(b) mit Hilfe des Determinantenkalküls (d.h. bestimmen Sie die Adjunkte von A).

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $a_i, b_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$ und

$$A\colon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in M((n+1) \times (n+1), K).$$

Zeigen Sie: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$.

(b) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x + c_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

wobei $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, x \in K$.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Für $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}, k < m$ bezeichne $\tau_{km} \in S_n$ die Abbildung, die k und m vertauscht, d.h.

$$\tau_{km} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, i \mapsto \begin{cases} i & \text{falls } i \neq k, m, \\ m & \text{falls } i = k, \\ k & \text{falls } i = m. \end{cases}$$

(Ein Element von S_n der Form τ_{km} für $1 \leq k < m \leq n$ heisst *Transposition*).

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign}(\tau_{km}) = -1$ ist.

(b) Zeigen Sie: Jedes $\sigma \in S_n$ $(n \geq 2)$ lässt sich als endliches Produkt von Transpositionen der Form (i) τ_{1m}, (ii) $\tau_{k(k+1)}$ schreiben.

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f(U) \subset U$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\bar{f} : V/U \to V/U, v + U \mapsto f(v) + U$ ein Endomorphismus von V/U definiert wird. Sei f_U die Einschränkung von f auf U, d.h. $f_U : U \to U, u \mapsto f(u)$. Beweisen Sie:

$$\det(f) = \det(f_U) \det(\bar{f}).$$

(b) Es seien $A \in M(m \times m, K), B \in M(n \times n, K)$ und $C \in M(m \times n, K)$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$