Spieß

1. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 30.10.08

Aufgabe 1. Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $A \subset X$ und $B \subset Y$. Zeigen Sie, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(b) Welche Eigenschaft muss man für f fordern, damit sogar $A = f^{-1}(f(A))$ für alle Teilmengen $A \subset X$ gilt?

Aufgabe 2. (a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n^2 - 2n + 5;$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + (-1)^n;$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$

(b) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f = Id_X$ gilt.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge die mindestens drei verschiedene Elemente enthält.

(a) Zeigen Sie, dass das Paar $(\mathrm{Bij}(X, X), \circ)$, bestehend aus der Menge

$$\mathrm{Bij}(X, X) \colon = \{f \mid f : X \to X \text{ ist bijektiv}\}$$

und der Komposition $(f, g) \mapsto f \circ g$, eine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Bij}(X, X), \circ)$ nicht abelsch ist, falls X mindestens drei verschiedene Elemente besitzt.

Aufgabe 4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv).

(b) Ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv), so ist f injektiv (bzw. g surjektiv).

Aufgabe 6. Prüfen Sie, ob die folgende Mengen mit der Verknüpfung $\star$ Gruppen sind:

(a) $G = \mathbb{R}$, $x \star y \colon = 3x + 4y$.

(b) $G = \mathbb{R}^3$, $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

(c) $G = \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2)$. Ist $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (y_1, y_2) \star (x_1, x_2)$?