Spieß

10. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 15.1.09

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & 9 \\ -1 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

über $\mathbb{Q}$ und über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen.

Aufgabe 2. Für welche $a, c \in \mathbb{R}$ ist das reelle Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 2 \\ 7x & + & 8y & + & az & = & 3 \\ 5x & + & 7y & + & 9z & = & c \end{array}$$

(i) lösbar, (ii) eindeutig lösbar und (iii) unlösbar? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe 3. Sei V ein reeller Vektorraum und $< \ , \ >$ ein Skalarprodukt auf V. Gegeben seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n, w \in V$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $< v_i, w > > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
(ii) $< v_i, v_j > \leq 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$,

d.h. $v_1, \ldots, v_n$ liegen im Halbraum $H = \{v \in V \mid < v, w >> 0\}$ und der Winkel zwischen je zwei der Vektoren ist stumpf. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$a_{ij} \colon = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die symmetrische Bilinearform

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

sei definiert durch

$$\beta(x,y) \colon = x \cdot A \cdot y^t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass β positiv definit ist.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) mit dem Gaußschen Algorithmus und (b) mit der Cramerschen Regel.

Aufgabe 6. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit $\beta(e_i, e_j) > 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Folgt dann, dass β positiv definit ist?