Spieß

11. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 22.1.09

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass

$$< f, g >: \; = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ der Polynome vom Grad $\leq n$ definiert.

(b) Geben Sie für $n = 4$ eine ON-Basis des orthogonalen Komplements der konstanten Polynome an.

Aufgabe 2. Sei $(V, < \;,\; >)$ ein euklidischer Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \subseteq U_2 \quad \Longleftrightarrow \quad U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp}$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_2^{\perp} + U_1^{\perp}$.

(c) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_2^{\perp} \cap U_1^{\perp}$.

Aufgabe 3. Sei $(V, < \;,\; >)$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine Abbildung mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$f \in O(V) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Für alle } v, w \in V \text{ gilt: } \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

Aufgabe 4. Sei $(V, < \;,\; >)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $w \in V$ definieren wir eine Abbildung s_w durch $s_w(v): \; = v - 2\frac{<v,w>}{<w,w>}w$ falls $w \neq 0$ und $s_0 = \mathrm{Id}_V$. Zeigen Sie:

(a) $s_w \in O(V)$ für alle $w \in V$.

(b) Für $u, w \in V - \{0\}$ gilt: $s_u = s_w \quad \Longleftrightarrow \quad$ Es gibt eine $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $u = \lambda w$.

(c) Zu jedem $f \in O(V)$ gibt es $w_1, \ldots, w_r \in V$, $r \leq n$ mit der Eigenschaft $f = s_{w_1} \circ \ldots \circ s_{w_r}$.

(Hinweis: Finden Sie zunächst ein $w_1 \in V$ so dass $\widetilde{f} \colon = s_{w_1} \circ f$ eine Gerade durch den Ursprung festhält und betrachten Sie dann die Einschränkung von $\widetilde{f}$ auf dem orthogonalen Komplement der Geraden.)

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und der zugehörigen Normfunktion $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$.

(a) Sei U die Ebene

$$U \colon = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - y + 3z = 0\}$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(b) Sei $v \colon = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf U. Berechnen Sie $p_U(v)$.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und $u \in U$ gilt:

$$\|v - p_U(v)\| \leq \|v - u\|$$

(d.h. $p_U(v)$ ist der Punkt auf U, der zu v am nächsten liegt).

Aufgabe 6. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \, , \, >$ und sei $w \in V$ mit $w \neq 0$. Sei $s_w : V \to V$ die Abbildung $s_w(v) = v - 2\frac{<v,w>}{<w,w>}w$. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass für die Darstellungsmatrix $A \colon = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(s_w)$ gilt:

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(s_w) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$