Spieß

12. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

22.1.2009 keine Abgabe

Aufgabe 1. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer Vektorraum. Für einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ bezeichne $f^* \in \mathrm{End}(V)$ die adjungierte Abbildung von f. Zeige:

(a) Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind $f \circ f^*$ und $f + f^*$ selbstadjungiert.

(b) Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ beide selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $f \circ g = g \circ f$ ist.

Aufgabe 2. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus (d.h. es gilt $f \circ f^* = f^* \circ f$). Zeige:

(a) $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^*)$.

(b) $\mathrm{Kern}(f)^\perp = \mathrm{Bild}(f)$.

(c) Ist $f^3 = f^2$, so ist f ein Projektor. Gilt diese Aussage auch für nicht normale Endomorphismen?

Aufgabe 3. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) f ist schiefadjungiert (d.h. $f^* = -f$).

(ii) $< v, f(v) >= 0$ für alle $v \in V$.

(b) Sei $\dim(V) = 2$ und f schiefadjungiert. Zeigen Sie, dass eine ON-Basis (v_1, v_2) von $(V, < \ , \ >)$ existiert mit

$$M^{(v_1,v_2)}_{(v_1,v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

für ein $\mu \in \mathbb{R}$.