Lösungen von Aufgabe 2 und Aufgabe 3 (b), Blatt 12

Aufgabe 2. (a) Sei $v \in V$. Wegen

$$\begin{aligned} < f(v), f(v) > &= < v, f^*(f(v)) >=< v, (f^* \circ f)(v) >=< v, (f \circ f^*)(v) > \\ &= < v, f(f^*(v)) >=< f^*(v), f^*(v) > \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Kern}(f) &\Leftrightarrow < f(v), f(v) >= 0 \\ &\Leftrightarrow < f^*(v), f^*(v) >= 0 \\ &\Leftrightarrow f^*(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in \mathrm{Kern}(f^*) \end{aligned}$$

(b) Sei $v \in \mathrm{Bild}(f)$ und $w \in \mathrm{Kern}(f)$, d.h. es gibt $u \in V$ mit $f(u) = v$ und es gilt $f(w) = 0$. Nach (a) gilt dann auch $f^*(w) = 0$. Somit ergibt sich:

$$< v, w >=< f(u), w >=< u, f^*(w) >=< u, 0 >= 0$$

d.h. die beiden Untervektorräume $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ sind zueinander orthogonal. Es folgt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)^\perp$. Andererseits gilt nach der Dimensionsformel und wegen $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f)^\perp$:

$$\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f)^\perp)$$

und damit $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$.

(c) Nach (b) gilt $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f)^\perp = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$, d.h. jedes $v \in V$ besitzt eine Darstellung der Form $v = v_1 + v_2$ mit eindeutig bestimmten $v_1 \in \mathrm{Kern}(f)$ und $v_2 \in \mathrm{Bild}(f)$. Wähle $u \in V$ mit $v_2 = f(u)$. Ist $f^3 = f^2$ so folgt

$$\begin{aligned} f^2(v) = f^2(v_1 + v_2) &= f^2(v_1) + f^2(v_2) = f(f(v_1)) + f(f(f(u))) = 0 + f^3(u) \\ &= 0 + f^2(u) = f(v_1) + f(v_2) = f(v) \end{aligned}$$

Also gilt $f^2 = f$, d.h. f ist ein Projektor.

Falls f nicht normal ist, folgt aus $f^3 = f^2$ nicht notwendig $f^2 = f$. Beispiel: $f = \ell_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $A^3 = A^2 = 0 \neq A$ gilt $f^3 = f^2$ aber $f^2 \neq f$.

Aufgabe 3 (b) O.B.d.A. gelte $f \neq 0$. Wähle $v \in V$ mit $f(v) \neq 0$ ($\Rightarrow v \neq 0$). Indem wir v ggf. durch ein skalares Vielfaches ersetzen können wir ausserdem annehmen, dass gilt $\|v\| = 1$. Nach (a) ergibt sich

$$< v, f(v) >= 0 =< f(v), f^2(v) >,$$

d.h. es gilt $v, f^2(v) \in L(f(v))^\perp$. Wegen $f(v) \neq 0$ gilt $\dim(L(f(v))) = 1$ und damit $\dim(L(f(v))^\perp) = \dim(V) - \dim(L(f(v))) = 1$. Es folgt $L(f(v))^\perp = L(v)$. Insbesondere ist $f^2(v)$ skalares Vielfaches von v, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f^2(v) = \lambda v$. Wegen

$$0 < \; < f(v), f(v) >=< v, f^*(f(v)) >=< v, -f^2(v) >= -\lambda < v, v >= -\lambda$$

gilt $\lambda < 0$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ die (positive) Wurzel aus $-\lambda$. Setze $v_1 \colon = v$, $v_2 \colon = -\mu^{-1} f(v)$. Wegen

$$\begin{aligned} < v_1, v_1 > &= \|v\|^2 = 1, \\ < v_1, v_2 > &= -\mu^{-1} < v, f(v) >= 0 \\ < v_2, v_2 > &= \mu^{-2} < f(v), f(v) >= -\lambda\mu^{-2} = 1 \end{aligned}$$

ist (v_1, v_2) ist eine ON-Basis. Da

$$f(v_1) = f(v) = -\mu v_2, \quad f(v_2) = -\mu^{-1} f^2(v) = -\mu^{-1}\lambda v = \mu v_1$$

folgt schliesslich

$$M^{(v_1,v_2)}_{(v_1,v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}.$$