Spieß

2. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 6.11.08

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Rechenregeln gelten.

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= \mathbf{0}, \\ a \cdot \mathbf{0} &= \mathbf{0}, \\ (-a) \cdot v &= a(-v) = -av, \\ (-1)v &= -v, \\ a \cdot v &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow a = 0 \text{ oder } v = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

für alle $a \in K$ und $v \in V$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{0}$ das Nullelement im Vektorraum und 0 das Nullelement in K.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ nicht zu dem Unterkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$ gehört.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie einen Körper mit 4 Elementen.

Aufgabe 4. Es sei n eine positive ganze Zahl die keine Primzahl ist. Für eine natürliche Zahl m bezeichne $r(m)$ den Rest von m bei der Division durch n, d.h. $r(m)$ ist die eindeutig bestimmte natürliche Zahl zwischen 0 und $n-1$, für die $\frac{m-r(m)}{n} \in \mathbb{N}$ gilt. Für $a, b \in R_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ setze

$$a \oplus b := r(a+b),$$

$$a \odot b := r(ab).$$

Zeigen Sie, dass $(R_n, \oplus, \odot)$ kein Körper ist.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Sei K ein Körper. Für $a, b \in K, b \neq 0$ schreibe $\frac{a}{b}$ für ab^{-1}. Leiten Sie aus den Körperaxiomen die folgende Identität her:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \forall\, a, b, c, d \in K, b \neq 0, d \neq 0.$$

Aufgabe 6. Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Mengen mit den gegebenen Verknüpfungen Körper sind:

(a) $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ mit

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &:= (a_1 b_1 + 2a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_2 b_2). \end{aligned}$$

(b) $(\mathbb{R}, +_s, \cdot_s)$ mit $a +_s b := a + b + 1$ und $a \cdot_s b := ab + a + b$.