Spieß

3. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 13.11.08

Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume:

$$\{(x, y, z) \mid z \geq 0\}, \quad \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}, \quad \{(x, y, z) \mid y + z = 0\},$$

$$\{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x - y + 2z = 0\}.$$

(b) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Untervektorräume:

$$\{f \mid f(x^2) = f(x)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}, \quad \{f \mid f(4) = 0\}, \quad \{f \mid f(0) = 4\},$$

$$\{f \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad } n\},$$

$$\{f \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq n\}.$$

Aufgabe 2. Gegeben seien m Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ in einem K-Vektorraum V. Wir definieren

$$\mathfrak{M}\colon = \{U \mid U \text{ ist Untervektorraum von } V \text{ und } v_1, \ldots, v_m \in U\}$$

und

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{M}} U\colon = \{v \in V \mid v \in U \text{ für alle } U \in \mathfrak{M}\}.$$

Zeigen Sie: $L(v_1, \ldots, v_m) = \bigcap_{U \in \mathfrak{M}} U$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $(a, b), (x, y) \in K^2$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(a, b), (x, y)$ genau dann linear abhängig sind, wenn $ay - bx = 0$ ist.

Aufgabe 4. (a) Gegeben seien $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) linear abhängige differenzierbare Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist das $(n+1)$–Tupel

$$(f_0(x), f_0'(x), \ldots, f_0^{(n)}(x)), \ldots, (f_n(x), f_n'(x), \ldots, f_n^{(n)}(x))$$

von Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ linear abhängig.

(b) Wir definieren $f_0, f_1, \ldots, f_n$ aus $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch $f_0(x) := 1$ und $f_i(x) := x^i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ linear unabhängig ist.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. (a) Gegeben seien die drei Vektoren $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,1)$ und $v_3 = (0,1,1)$ im $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist.

(b) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien w_1, w_2, w_3 Vektoren von V. Zeigen Sie: Ist (w_1, w_2, w_3) linear unabhängig, so auch $(w_1, w_1 + w_2, w_1 + w_2 + w_3)$.

Aufgabe 6. Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und seien $f_1, f_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Funktionen $f_1(x) := \sin(x)$ und $f_2(x) := \cos(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass (f_1, f_2) linear unabhängig ist.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $f(x) = \sin(x + \alpha)$. Stellen Sie f als Linearkombination von f_1 und f_2 dar.