Spieß

4. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 20.11.08

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 :\ = (0, 1, \ldots, 1), v_2 :\ = (1, 0, 1, \ldots, 1), \ldots, v_n :\ = (1, \ldots, 1, 0)$ für $n \geq 2$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

(b) Stellen Sie $e_1 :\ = (1, 0, \ldots, 0)$ als Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dar.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Definiere

$$d(V) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l}\text{Es gibt Untervektorräume } U_0, U_1, \ldots, U_n \text{ von } V,\\ \text{so dass } U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n\}.\end{array}$$

Beweisen Sie, dass $d(V) = \dim(V)$ gilt.

Aufgabe 3. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim(U_i) - (k-1)\dim(V).$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente von K eine Primzahlpotenz ist.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Sei V ein reeller Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Sei

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 + 7v_4 \\ w_2 &= 3v_1 + 2v_2 + v_3 \\ w_3 &= -7v_1 + v_3 + 5v_4 \\ w_4 &= 19v_2 + 129v_3 \\ w_5 &= -v_1 + v_3 - v_4 \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ linear abhängig ist.

Aufgabe 6. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$f_1(x) \colon = \sin(x), \quad f_2(x) \colon = \sin(2x), \quad f_3(x) \colon = (1 + \cos(x)) \sin(x).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $L(f_1, f_2, f_3)$.