Spieß

5. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben

Abgabe: Do, 27.11.08

Aufgabe 1. Gibt es eine lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^4$ jeweils auf die angegebenen Vektoren $b_i \in \mathbb{R}^3$ abbilden:

(a) $a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (0,1,1,1), \quad a_3 = (1,1,1,0), \quad a_2 = (1,1,0,1)$
$b_1 = (0,1,2), \quad b_2 = (1,0,2), \quad b_3 = (1,2,0), \quad b_4 = (0,0,7)$

(b) $a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (0,1,1,1), \quad a_3 = (-1,1,0,0)$
$b_1 = (0,1,2), \quad b_2 = (1,0,2), \quad b_3 = (1,2,0)$

(c) $a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (0,1,1,1), \quad a_3 = (-1,1,0,0)$
$b_1 = (0,1,2), \quad b_2 = (1,2,0), \quad b_3 = (1,1,-2)$.

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ den Untervektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, d.h. $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die es reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt, so dass

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}, f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mapsto f'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots 2 a_2 x + a_1$$

linear ist.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(D)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(D)$ an.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(D)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(D)$ an.

Aufgabe 3. (a) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Zeigen Sie: Wenn es ein $g \in \mathrm{Hom}(V,V)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{Id}_V$, dann ist f ein Isomorphismus und $g = f^{-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage im Teil (a) für den unendlich-dimensionalen K-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ falsch ist.

Aufgabe 4. Seien $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{g} V_4$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leq \mathrm{rg}(h \circ g \circ f) + \mathrm{rg}(g).$$

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\mathrm{rg}(f \circ f) = \mathrm{rg}(f)$ gilt. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) = V.$$

Aufgabe 6. (a) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ist linear unabhängig.