Spieß

6. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 4.12.08

Aufgabe 1. Gegeben seien $v_1 :\; = (1,0,0,5), v_2 :\; = (0,0,1,3) \in \mathbb{R}^4$. Finden Sie eine reelle 2×4-Matrix A, so dass der Kern von $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ die lineare Hülle von (v_1, v_2) ist.

Aufgabe 2. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $n = \dim(V), m = \dim(W)$ und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ und Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ von W gibt, so dass für die Darstellungsmatrix $(a_{ij}) :\; = M^{(v_1,\ldots,v_n)}_{(w_1,\ldots,w_m)}(f) \in M(m \times n, K)$ gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, 1 \leq i, j \leq r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V mit $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = 0$. (V heisst dann die *direkte Summe* von U_1 und U_2. Schreibweise: $V = U_1 \oplus U_2$).

(a) Zeigen Sie: Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$.

(b) Wir definieren $p = p_{(U_1,U_2)} : V \to V$ durch $p(v) :\; = u_2$. Zeigen Sie: (i) p linear ist,
(ii) $p \circ p = p$, (iii) $\mathrm{Kern}(p) = U_1$, (iv) $\mathrm{Bild}(p) = U_2$.

(c) Sei $n = \dim(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass $M^{(v_1,\ldots,v_n)}_{(v_1,\ldots,v_n)}(p) \in M(n \times n, K)$ die in Aufgabe 2 angegebene Form hat.

(d) Ein $p \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $p \circ p = p$ nennt man einen *Projektor*. Sei

$$\mathfrak{M} :\; = \{(U_1, U_2) \mid\; U_1, U_2 \text{ sind Untervektorräume von } V \text{ mit } U_1 \oplus U_2 = V\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\to \{p \in \mathrm{Hom}(V,V) \mid \; p \text{ ist Projektor}\} \\ (U_1,U_2) &\mapsto p_{(U_1,U_2)} \end{aligned}$$

bijective ist.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi\,|_{U_1} \colon U_1 \to (U_1+U_2)/U_2, x \mapsto x+U_2$ ein Epimorphismus mit Kern $= U_1 \cap U_2$ ist.

(b) Benutzen Sie die universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums (Satz 2.2.6 aus der Vorlesung) um zu zeigen, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1+U_2)/U_2$$

gibt.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Sei $V \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die lineare Hülle von $\underline{v} \colon = (\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2)$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(D)$ des Endomorphismus $D : V \to V, f \mapsto f'$ (Sie können ohne Beweis voraussetzen, dass $\underline{v}$ linear unabhängig ist).

Aufgabe 6. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathrm{Fix}(f)$ der Untervektorraum $\mathrm{Fix}(f) \colon = \{v \in V | f(v) = v\}$. Zeigen Sie: Ist $r \colon = \dim \mathrm{Fix}(f) > 0$ so gibt es eine Basis $\underline{v}$ von V mit

$$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} E_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$