Spieß

**7. Übung zur Vorlesung**
**Lineare Algebra 1**

**I. Hausaufgaben** Abgabe: Do, 11.12.08

**Aufgabe 1.** Es sei $A \in M(2\times 2, K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $AB = BA$ für alle $B \in M(2 \times 2, K)$.

(ii) Es gibt ein $\lambda \in K$ mit

$$A = \lambda E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Ränge der folgenden Matrizen. Welche der Matrizen ist invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$A\colon= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B\colon= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C\colon= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D\colon= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3.** Sei $K$ ein Körper und seien $m$ und $n$ positive natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass durch

$$A \sim B \quad :\iff \quad \exists\, P \in \mathrm{Gl}_m(K), Q \in \mathrm{Gl}_n(K) : PAQ = B$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M(m \times n, K)$ definiert wird. Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen.

**Aufgabe 4.** (a) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n \times n, K)$ mit $A^n = 0$, so ist $E_n + A$ invertierbar. (Hinweis: Betrachte $E_n - A + A^2 \pm \ldots + (-A)^{n-1}$).

(b) Sei $G \subset M(n \times n, K)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonalen, d.h.

$$G\colon = \{(a_{ij}) \in M(n \times n, K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j \text{ und } a_{ij} = 1 \text{ falls } i = j\}.$$

Beweisen Sie, dass $G$ eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation ist.

## II. Präsenzaufgaben

**Aufgabe 5.** Seien $A$ eine invertierbare und $B$ eine beliebige $n \times n$–Matrix und es gelte $AB = BA$. Gilt dann auch $A^{-1}B = BA^{-1}$?

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$A\colon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jeweils für den Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_5$

**Aufgabe 7.** Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir $w_j\colon = \sum_{i=1}^{j} v_i$.

(a) Zeigen Sie, dass $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von $V$ ist.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M^{(v_1,\ldots,v_n)}_{(w_1,\ldots,w_n)}(\mathrm{Id}_V)$.