Spieß

8. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 18.12.08

Aufgabe 1. Schreiben Sie die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgabe 2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und U ein m-dimensionaler Untervektorraum von V. Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U und $\omega : V^n \to K$ eine Determinantenform auf V. Setze $k\colon = n - m$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_{(u_1,\ldots,u_m)} : (V/U)^k \longrightarrow K, (v_1 + U, \ldots, v_k + U) \mapsto \omega(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k)$$

eine Determinantenform auf V/U definiert.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ und ω eine Determinantenform auf V mit $\omega(b_1, \ldots, b_n) = 1$. Sei $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \in V$. Berechnen Sie

$$\omega(v + b_1, \ldots, v + b_n)$$

(b) Sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch

$$f(b_i) = b_1 + \ldots + \widehat{b_i} + \ldots + b_n$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Berechnen Sie $\det(f)$.

Aufgabe 4. Sei

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ V & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Es sei α ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass gilt $\det(f) = \det(g)$.

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und sei $f : V \to V$ die (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung mit

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{falls } i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ v_1 & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(f)$.

Aufgabe 6. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und U ein m-dimensionaler Untervektorraum von V. Sei $\omega : V^n \to K$ eine Determinantenform auf V und $(v_{m+1}, \ldots, v_n)$ ein fest gegebenes $(n-m)$–Tupel von Vektoren in V. Zeigen Sie:

(a) $\omega_U(u_1, \ldots, u_m) :\; = \omega(u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ ist eine alternierende m-Form auf U.

(b) Wann ist ω_U eine Determinantenform?