Spieß

9. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

I. Hausaufgaben

Abgabe: Do, 8.1.09

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a) mit dem Gaußschen Algorithmus,

(b) mit Hilfe des Determinantenkalküls (d.h. bestimmen Sie die Adjunkte von A).

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Für $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}, k < m$ bezeichne $\tau_{km} \in S_n$ die Abbildung, die k und m vertauscht, d.h.

$$\tau_{km} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, \quad i \mapsto \begin{cases} i & \text{falls } i \neq k, m, \\ m & \text{falls } i = k, \\ k & \text{falls } i = m. \end{cases}$$

(diese Elemente von S_n werden *Transpositionen* genannt). Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{sign}(\tau_{km}) = -1$ für alle $k, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq k < m \leq n$.

(b) Jedes $\sigma \in S_n$ $(n \geq 2)$ lässt sich als Produkt von Transpositionen der Form τ_{1m} schreiben.

(c) Jedes $\sigma \in S_n$ $(n \geq 2)$ lässt sich als Produkt von Transpositionen der Form $\tau_{k(k+1)}$ schreiben.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$–Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = (i + j - 1)^2$$

für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ mit $a_i + b_j \neq 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix} = \frac{\prod_{i<j}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}.$$

II. Präsenzaufgaben

Aufgabe 5. Für $n \geq 1$ sei $\mathfrak{A}_n$ die Menge der geraden Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$, d.h. $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_n$ zusammen mit der Komposition eine Gruppe ist ($\mathfrak{A}_n$ ist also eine *Untergruppe* von S_n; sie wird die *alternierende Gruppe* genannt). Wie viele Elemente hat $\mathfrak{A}_n$?

Aufgabe 6. Sei K ein Körper, seien $a, b \in K$ und sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Berechnen Sie die Determinante der $2n \times 2n$–Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{falls } i = j, \\ b & \text{falls } i + j = 2n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$