Musterlösungen zu einigen Klausuraufgaben der 1. Klausur zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 3. (a) Sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Da $\mathrm{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von V ist gilt $0 \in \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt $f^2(v) = f(f(v)) = f(0) = 0$, d.h. $v \in \mathrm{Kern}(f^2)$.

(b) Sei $v \in \mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f)$. Wegen $v \in \mathrm{Bild}(f)$ gibt es ein $w \in V$ mit $f(w) = v$ und wegen $v \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt $f(v) = 0$. Es folgt $f^2(w) = f(fw)) = f(v) = 0$, d.h. $w \in \mathrm{Kern}(f^2)$ und $v = f(w) \in f(\mathrm{Kern}(f^2))$.

Sei umgekehrt $v \in f(\mathrm{Kern}(f^2))$. Folglich gibt es ein $w \in \mathrm{Kern}(f^2)$ mit $v = f(w) \in f(\mathrm{Kern}(f^2))$. Wegen $w \in \mathrm{Kern}(f^2) \subseteq V$ gilt $v = f(w) \in f(V) = \mathrm{Bild}(f)$ und $f(v) = f(f(w)) = 0$, d.h. $v \in \mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f)$.

(c) Betrachte die lineare Abbildung $g = f|_{\mathrm{Kern}(f^2)} : \mathrm{Kern}(f^2) \to V, v \mapsto g(v) := f(v)$. Es gilt $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(f^2) \overset{2(a)}{=} \mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(g) = f(\mathrm{Kern}(f^2)) \overset{2(b)}{=} \mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f)$. Mit Hilfe der Dimensionsformeln für f, f^2 und g erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f)) &= \dim(\mathrm{Bild}(g)) = \dim(\mathrm{Kern}(f^2)) - \dim(\mathrm{Kern}(g)) \\
&= \dim(\mathrm{Kern}(f^2)) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) \\
&= (\dim(V) - \mathrm{rg}(f^2)) - (\dim(V) - \mathrm{rg}(f)) \\
&= \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(f^2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Da $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, ist es eine Basis von $U := L(v_1, \ldots, v_n)$. Sei $\phi = \phi_{\underline{v}} : K^n \to U$ das Koordinatensystem von $\underline{v}$, d.h. ϕ ist der eindeutig bestimmte Isomorphismus $K^n \to U$, der den i-ten Standardbasisvektor e_i auf v_i abbildet. Für ein beliebiges $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ gilt

$$\phi(x) = \phi(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j) = \sum_{i=j}^{n} x_j v_j$$

Folglich ist w_i das Bild der i-ten Zeile von A unter ϕ. Da die Eigenschaft "Linear Unabhängig" eines n-Tuples von Vektoren unter Isomorphie erhalten bleib folgt:

$$\begin{aligned}(w_1,\ldots,w_n) \text{ ist linear unabhängig} &\Leftrightarrow \text{ Die Zeilen von } A \text{ sind linear unabhängig}\\ &\Leftrightarrow A \text{ hat Rang } n\\ &\Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar}\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (a) und (b). Sei $X := \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $Y := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$\det(X) = -\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 7 - 6 = 1$$

und

$$\det(Y) = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2\cdot(-5) - 1 = -11$$

Wegen $\det(X) \neq 0$ sind die Spalten v_1, v_2, v_3 von X linear unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Nach einem Satz der Vorlesung gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Sei $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $A = M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. des Basenpaars $(\underline{e}, \underline{e})$. Es gilt dann $f = \ell_A$, d.h. $Av_i = w_i$ für $i = 1, 2, 3$ und damit $AX = Y$. Damit folgt

$$\det(f) = \det(A) = \det(A)\det(X) = \det(AX) = \det(Y) = -11.$$

Aufgabe 7 Wegen

$$\beta(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} x_i x_{i+1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2} x_{i-1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist zu zeigen:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0$$

Beweis von (1) und (2). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}((x_i - x_{i+1})^2 + 2x_i x_{i+1})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2\right) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}
\end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung steht genau dann Gleichheit, wenn in der ersten Summe alle Summanden $= 0$ sind, d.h. wenn gilt $x_1 = x_n = 0$ und $x_1 - x_2 = \ldots = x_{n-1} - x_n = 0$. Es folgt (2).

Alternativer Beweis von (1) und (2) mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

Sei $<\ ,\ >$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^{n-1}$ und $\|\ \|$ die induzierte Norm. Für $v = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ (bzw. $w = (x_2, \ldots, x_n)$) gilt

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} = \|v\|, \quad \text{(bzw.} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=2}^{n} x_i^2} = \|w\|)$$

wobei Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn gilt $x_n = 0$ (bzw. $x_1 = 0$). Zusammen mit der Cauchy-Schwarzsche Ungleichung erhalten wir

$$\text{(3)} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^2 \geq \|v\|\|w\| \geq < v, w > = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$$

Es folgt (1).

Zum Beweis von (2) nehmen wir an, dass $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$. Die beiden Ungleichungen in (3) sind in diesem Fall also Gleichungen. Ist $v = 0$ so folgt $x_n^2 = 0$, d.h. $x_n = 0$ und damit $x = 0$. Ebenso zeigt man: $w = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bleibt der Fall $v \neq 0 \neq w$ zu untersuchen. Wegen $\|v\|, \|w\| > 0$ folgt:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|v\| = \|w\|, \quad < v, w > = \|v\|\|w\|$$

Die erste Gleichung impliziert $x_1 = x_n = 0$ und die zweite, dass der Winkel, der von den beiden Vektoren v, w eingeschlossen wird $= 0$ ist. Also ist w positives skalares Vielfaches von v, d.h. es gilt $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$. Es folgt $\lambda x_i = x_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Wegen $x_1 = 0$ folgt sukzessive $x_2 = \ldots = x_n = 0$ im Widerspruch zur Annahme $v \neq 0 \neq w$. Also ist $x = 0$.