M. Spieß/M. Lederer

2. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben

Abgabe: Do, 13.4.06

Aufgabe 1. Die symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform β auf $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\beta(x, y) = x_1y_1 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Bestimmen Sie eine Sylvesterbasis von $\mathbb{R}^3$ für β.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2$. Sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum und β eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf V mit zugehöriger quadratischer Form $q(v) \colon = \beta(v, v)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es gibt ein $v \in V - \{0\}$ mit $q(v) = 0$.

(ii) Es gibt eine Basis (v_1, v_2) von V mit

$$M_{(v_1,v_2)}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gibt eine Basis (w_1, w_2) von V mit $q(w_1) = q(w_2) = 0$ und $\beta(w_1, w_2) = 1$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert

$$\beta(A, B) \colon = \mathrm{Spur}(AB)$$

eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform. Bestimmen Sie die Signatur und den Positivitätsindex von β.

Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe der Diagonaleinträge.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf V mit Positivitätsindex $n-1$. Sei $C\colon = \{v \in V \mid \beta(v,v) < 0\}$. Zeigen Sie:

(a) $\beta(v,w) \neq 0$ für alle $v, w \in C$.

(b) Seien $u, v, w \in C$. Ist $\beta(v,w) < 0$, so gilt: $\beta(u,v)\beta(u,w) > 0$.

(c) Auf C definiert

$$v \sim w \quad :\Longleftrightarrow \quad \beta(v,w) < 0$$

eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen (Vergangenheit und Zukunft).

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Sei β eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, so dass $\beta(e_i, e_j) > 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ (dabei ist $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$). Folgt dann, dass β positiv definit ist?

Aufgabe 6. Sei β eine symmetrische Bilinearform auf dem rellen Vektorraum V mit zugehöriger quadratischen Form q, so dass $q(v) = 0$ für alle $v \in V$. Folgt dann $\beta = 0$?

Aufgabe 7. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen auf $M(m \times n, K)$ sind:

(a) $A \sim_1 B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathrm{Gl}_n(K), Y \in \mathrm{Gl}_m(K) : XAY = B.$

(b) $A \sim_2 B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathrm{Gl}_n(K) : XA = B.$

Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Eine Teilmenge $R \subset M$ heisst Repräsentantensystem der Äquivalenzrelation, wenn für jedes $x \in M$ genau ein $r \in R$ existiert mit $x \sim r$.

Aufgabe 8. Bestimmen Sie Repräsentantensysteme der Äquivalenzrelationen $\sim_1$ und $\sim_2$.