Lederer/Paskunas/Spieß

10. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben

Abgabe: Do, 29.6.06

Aufgabe 1. Seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{A}'$ euklidische affine Räume und $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ eine injektive affine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f erhält die Winkel, d.h. für alle $P, Q, R \in \mathbb{A}$, $P \neq Q \neq R$ gilt

$$\measuredangle(P, Q, R) = \measuredangle(f(P), f(Q), f(R)).$$

(ii) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$, so dass

$$d(f(P), f(Q)) = \lambda d(P, Q)$$

für alle $P, Q \in \mathbb{A}$.

Aufgabe 2. (a) Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum. Sei $\mathrm{Auff}(\mathbb{A})$ die Menge der bijektiven affinen Abbildungen $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Auff}(\mathbb{A})$ zusammen mit der Komposition eine Gruppe bildet.

(b) Sei speziell $\mathbb{A} = K^n$. Sei G die Menge der $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen B der Form

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A \in \mathrm{Gl}_n(K), b \in M(n \times 1, K)$$

Sei

$$\Phi : G \longrightarrow \mathrm{Auff}(K^n), B = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (f_B : x \mapsto f_B(x) = Ax + b).$$

Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist und dass gilt:

$$\Phi(B_1 B_2) = \Phi(B_1) \circ \Phi(B_2) \qquad \forall\, B_1, B_2 \in G$$

(eine Abbildung zwischen Gruppen mit diesen beiden Eigenschaften nennt man einen *Gruppenisomorphismus*).

Aufgabe 3. Sei M eine Minkowski-Raumzeit, $P, Q \in M$ und $v \in C^+$ mit $< v, v >= -1$ und $w\colon = \overrightarrow{PQ} \notin L(v)$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Zahlen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1$ gibt, mit

(i) $< w - t_0 v, w - t_0 v >=< w - t_1 v, w - t_1 v >= 0$.

(ii) $< \frac{1}{2}(t_0 + t_1)v, v >=< w, v >$.

(Bezüglich $I = (P, v)$ ist Q gleichzeitig mit $P + \frac{1}{2}(t_0 + t_1)v$, der Mitte zwischen dem Aussenden und Rückkehren eines in Q reflektierten Lichtstrahls).

Aufgabe 4. Sei $<\ ,\ >$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^4$.

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass die Summe $x + y$ raumartig (oder $= 0$) ist, falls es einen zeitartigen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ gibt, der sowohl auf x als auch auf y senkrecht steht.

(b) Muss es einen zeitartigen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ geben, der sowohl auf x als auch auf y senkrecht steht, wenn die Summe $x + y$ raumartig ist?

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Sei $<\ ,\ >$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^4$, d.h. $< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$. Geben Sie Beispiele dafür an, dass die Summer zweier raumartiger Vektoren im $\mathbb{R}^4$ raumartig, zeitartig und lichtartig sein kann.

Aufgabe 6. Sei $<\ ,\ >$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Sei $v_1\colon = (0, 1), v_2\colon = (1, \sqrt{2}), v_3\colon = (-1, \sqrt{2})$ und $I_i\colon = (0, v_i)$.

(a) Skizzieren Sie $L(v_i)$, $L(v_i)^\perp$.

(b) Berechnen Sie $R_{I_i}(v_j)$ und $t_{I_i}(v_j)$ und die Relativgeschwindigkeit $u_{ij} \in L(v_i)^\perp$ des Inertialsystems I_j bzgl. I_i für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$.