Lederer/Paskunas/Spieß

11. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 6.7.06

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Enthält eine Quadrik Q in V den Nullvektor, drei Vektoren u, v, w und die Summen $u+v, u+w, v+w$, so enthält Q auch den Vektor $u+v+w$ (d.h. für $V = \mathbb{R}^3$: Enthält eine Quadrik 7 Ecken eines Parallelepipeds, dann auch die achte).

Aufgabe 2. Geben Sie zu den folgenden Quadriken Q_i im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ symmetrische Matrizen A_i, Vektoren w_i und Zahlen γ_i an, so dass

$$Q_i = \{x \mid < A_i x, x > +2 < w_i, x > +\gamma_i = 0\}.$$

Dabei bezeichnet $< \, , \, >$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(a) $Q_1 \colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - y = 4\}$.

(b) $Q_2 \colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy - 4x + 5y = 0\}$.

(c) $Q_2 \colon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

(d) Bestimmen Sie die Ausnahmerichtungen dieser Quadriken.

(e) Zeigen Sie: Zu jedem $x \in Q_3$ existieren genau zwei Geraden g_x, h_x mit $x \in g_x \subset Q_3$ und $x \in h_x \subset Q_3$.

Aufgabe 3. Sei Q eine Quadrik in einem Vektorraum V und $\alpha : V \to W$ eine bijektive, affine Abbildung in einen weiteren Vektorraum W. Zeigen Sie, dass dann $\alpha(Q)$ eine Quadrik in W ist. Was kann passieren, wenn α nicht bijektiv ist?

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $H \subseteq V$ eine Hyperebene und $v \in V - H$. Sei Q eine Quadrik in H. Zeigen Sie, dass die

Menge

$$Q_1 := \bigcup_{b \in Q} (b + L(v))$$

(die Vereinigung der Punkte auf allen Geraden durch Elemente von Q mit Richtungsvektor v) eine Quadrik in V ist.

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Zwei Quadriken $Q_1, Q_2 \subset V$ heissen affin äquivalent, wenn es eine bijektive, affine Abbildung $\alpha : V \to V$ gibt mit $\alpha(Q_1) = Q_2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Quadriken $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^2$ affin äquivalent sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 = 1\}$ nicht affin äquivalent sind.

Aufgabe 6. Geben Sie zu den folgenden Quadriken Q_i im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ symmetrische Matrizen A_i, Vektoren w_i und Zahlen γ_i an, so dass

$$Q_i = \{x \mid < A_i x, x > +2 < w_i, x > +\gamma_i = 0\}.$$

(a) $Q_1 \colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x = 1\}$.

(b) $Q_2 \colon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x^2 - 24x + 28\}$.

(c) $Q_2 \colon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2z = 1\}$.

Aufgabe 7. Sei V zweidimensional und seien Q_1, Q_2 Quadriken in V. Zeigen Sie: Gibt es fünf paarweise verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_5 \in V$ (von denen höchstens drei auf einer Geraden liegen) mit $v_i \in Q_1 \cap Q_2$, $1 \leq i \leq 5$ so gilt $Q_1 = Q_2$.