Musterlösung von Aufgabe 7, 11. Übung

Zu zeigen ist: Seien $P_1, \ldots, P_5$ fünf paarweise verschiedene Punkte eines zweidimensionalen affinen Raumes $\mathbb{A}$, von denen keine vier auf einer Geraden liegen. Dann gibt es höchstens eine Quadrik Q mit $P_i \in Q$ für alle $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Beweis. Für $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i \neq j$ sei g_{ij} die Gerade durch P_i und P_j, also $g_{ij} = \{tP_i + (1-t)P_j \mid t \in K\}$. Da höchstens drei der Punkte $P_1, \ldots, P_5$ auf einer Geraden liegen, können wir $i, j \in \{3, 4, 5\}$ mit $i \neq j$ so auswählen, dass die Punkte P_i, P_j nicht auf der Geraden g_{12} liegen. Von den vier Punkten P_1, P_2, P_i, P_j liegen also keine drei auf einer Geraden.

Behauptung: Mindestens eines der drei Geradenpaare (g_{12}, g_{34}), (g_{14}, g_{23}) und (g_{13}, g_{24}) besteht nicht aus parallelen Geraden.

Betrachte dazu das Viereck $P_1P_2P_iP_j$. Falls es kein Parallelogramm ist, sind entweder die beiden Geraden g_{12}, g_{34}, oder die beiden Geraden g_{14}, g_{23} nicht parallel. Falls $P_1P_2P_iP_j$ ein Parallelogramm ist, sind die beiden Geraden g_{13}, g_{24} nicht parallel, denn Sie schneiden sich dann im Schwerpunkt

$$\sigma(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 + \frac{1}{4}P_4.$$

Nach evtl. Umnummerierung der Punkte $P_1, \ldots, P_5$ können wir also annehmen, dass von den vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 keine drei auf einer Geraden liegen und dass die Geraden g_{12}, g_{34} nicht parallel sind.

Sei U der Schnittpunkt von g_{12} und g_{34}, sei $v\colon = \overrightarrow{UP_1}$ und $w\colon = \overrightarrow{UP_3}$. Betrachte das affine Bezugssytem (U, v, w) von $\mathbb{A}$ (d.h. wir versehen $\mathbb{A}$ mit einem Koordinatensystem mit Ursprung U, x-Achse g_{12} und y-Achse g_{34}). Jeder Punkt $P \in \mathbb{A}$ besitzt eine Darstellung der Form $P = U + (xv + yw)$ mit eindeutig bestimmten $x, y \in K$. Das Paar (x, y) sind die Koordinaten von P bzgl. (U, v, w). Die Koordinaten von P_1 (bzw. P_3) sind $(1, 0)$ (bzw. $(0, 1)$). Da der Punkt P_2 auf der Geraden g_{12} liegt und von U und P_1 verschieden ist, sind seine Koordinaten von der Form $(\lambda, 0)$ mit $\lambda \neq 0, 1$. Ebenso gilt:

Die Koordinaten von P_4 bzgl. (U, v, w) sind von der Form $(0, \mu)$ mit $\mu \neq 0, 1$. Seien (α, β) die Koordinaten von P_5.

Sei Q eine Quadrik, die die fünf Punkte $P_1, \dots, P_5$ enthält und sei

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0 \tag{1}$$

die Gleichung von Q bzgl. (U, v, w) (d.h. ein Punkt $P = U + (xv + yw) \in \mathbb{A}$ liegt genau dann in Q, wenn seine Koordinaten (x, y) der Gleichung (1) genügen). Wir müssen zeigen, dass das Sechstupel $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c)$ eindeutig bestimmt ist (bis auf skalare Vielfache). Wegen $P_1, \dots, P_5 \in Q$ ist $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c)$ eine nicht-triviale Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems in 6 Unbestimmten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2 & 0 & \mu & 1 \\ \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 & \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Zu zeigen ist also, dass die Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2 & 0 & \mu & 1 \\ \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 & \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

maximalen Rang besitzt.

1. Fall: $\alpha\beta \neq 0$.
Es genügt zu zeigen, dass die ersten fünf Spalten von A eine invertierbare Matrix bilden. Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2 & 0 & \mu \\ \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 & \alpha & \beta \end{pmatrix} = \pm\alpha\beta \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mu^2 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \pm\alpha\beta \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2 & \mu \end{pmatrix}$$

$$= \pm\alpha\beta \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu^2 & \mu \end{pmatrix} = \pm\alpha\beta\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu) \neq 0$$

2. Fall: $\alpha\beta = 0$.
Sei etwa $\beta = 0$, d.h. $P_5 \in g_{12}$. Wegen $P_5 \neq P_1, P_2$ gilt dann $\alpha \neq 1, \lambda$. Die erste und die letzten vier Spalten von A bilden dann eine invertierbare Matrix, denn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mu^2 & 0 & \mu & 1 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mu^2 & 0 & \mu & 1 \end{pmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mu^2 & \mu \end{pmatrix}$$

$$= \pm \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu^2 & \mu \end{pmatrix} = \pm(\lambda-1)(\alpha-1)(\lambda-\alpha)\mu(1-\mu) \neq 0.$$

Also hat A in beiden Fällen Rang 5.