Lederer/Paskunas/Spieß

12. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

keine Abgabe

Aufgabe 1. Sei $f : U \to U$ ein Endomorphismus eines m-dimensionales K-Vektorraumes, $g : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraumes, und sei

$$f \otimes g : U \otimes V \to U \otimes V, \quad x \otimes y \mapsto f(x) \otimes f(y)$$

der induzierte Endomorphismus.

(i) Zeigen Sie $\det(f \otimes g) = \det(f)^n \det(g)^m$.

(Hinweis: Betrachten Sie die beiden Spezialfälle $f = \mathrm{id}_U$ und $g = \mathrm{id}_V$.)

(ii) Zeigen Sie weiterhin: $\mathrm{Spur}(f \otimes g) = \mathrm{Spur}(f)\mathrm{Spur}(g)$.

Aufgabe 2. Seien U, V zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei B der K-Vektorraum der Bilinearformen $\Phi : U \times V \to K$, und $B^\vee = \mathrm{Hom}_K(B, K)$ sein Dualraum. Wir definieren eine Abbildung

$$\iota : U \times V \to B^\vee, \quad (x, y) \mapsto [\Phi \mapsto \Phi(x, y)].$$

Zeigen Sie, dass ι bilinear ist, und dass $B^\vee$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besitzt. Es gilt also $B^\vee \cong U \otimes V$.

Aufgabe 3. Seien U und V zwei K-Vektorräume.

(i) Seien $a \in U$ und $b \in V$ zwei Vektoren, und $a \otimes b \in U \otimes V$ ihre Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass $a \otimes b = 0$ genau dann gilt, wenn entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

(ii) Seien nun $a, a' \in U$ und $b, b' \in V$, alle $\neq 0$. Beweisen Sie dass $a \otimes b = a' \otimes b'$ genau dann gilt, wenn es ein Skalar $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $a' = \lambda a$ und $b' = \lambda^{-1} b$.