M. Spieß/M. Lederer

2. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 20.4.06

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A\colon = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

diagonalisierbar ist und geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{R})$ an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ($n \geq 1$) und $f : V \to V$ ein Automorphismus. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten von f und f^{-1}? Zeigen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn f^{-1} diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Seien $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\sum_{i=1}^k U_i = \bigoplus_{i=1}^k U_i$

(ii) Für $j = 1, \ldots, k$ gilt $(\sum_{i \neq j} U_i) \cap U_j = 0$.

(iii) $\dim(\sum_{i=1}^k U_i) = \sum_{i=1}^k \dim(U_i)$.

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie alle komplexen Nullstellen von $X^5 - 5X^3 - 20X^2 + 24X$.

(a) Bestimmen Sie den grössten gemeinsamen Teiler der reellen Polynome $X^4 + 2X^3 - X^2 - 6X - 6$ und $2X^3 + X^2 - 6X - 3$.

II. Tutoriumsaufgaben

V ist im Folgenden ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 5. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist diagonalisierbar} \quad \Longrightarrow \quad V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f).$$

Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 6. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist diagonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.$$

Aufgabe 7. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $A = (a_{ij})$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Sei $g : V \to V$ der durch $g(v_i) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ definierte Endomorphismus von V. Zeigen Sie: Die Menge der Eigenwerte von f ist gleich der Menge der Eigenwerte von g.