Lederer/Paskunas/Spieß

3. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 27.4.06

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

$$(f(X))^p = f(X^p), \quad \forall f(X) \in \mathbb{F}_p[X].$$

Aufgabe 2. Sei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$. Sei $f \in \mathbb{N}$ so, dass $n < p^{f+1}$ und für $i \in \{0, 1, \ldots, f\}$, seien $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ gegeben mit $0 \leq n_i \leq p-1$, $0 \leq m_i \leq p-1$ und

$$n = \sum_{i=0}^{f} n_i p^i, \quad m = \sum_{i=0}^{f} m_i p^i.$$

Zeigen Sie:

$$\binom{n}{m} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

genau dann wenn $n_i \geq m_i$ für $0 \leq i \leq f$.

Hinweis. Schreiben Sie $(X+1)^n \in \mathbb{F}_p[X]$ auf zwei Weisen als Summe $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

V ist im Folgenden ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Für welche Polynome $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in K[X]$, ist der Endomorphismus $P(f) := \sum_{i=0}^{k} a_i f^i \in \mathrm{End}(V)$ ein Isomorphismus?

Aufgabe 4. Die durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

rekursiv definierten Zahlen heissen *Fibonacci-Zahlen*. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(c) Benutzen Sie (b) um zu zeigen:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. (a) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von

$$A\colon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B\colon = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A, B \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(b) Welche Eigenwerte hat

$$C\colon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{C}).$$

Welche Eigenwerte hat $C \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$?

Aufgabe 6. Sei V ein dreidimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\chi_f(X) = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$. Was ist das charakteristische Polynom von f^2?

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass es zu jedem normierten Polynom $p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[X]$ eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ gibt mit $\chi_A = p$.