Lederer/Paskunas/Spieß

5. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 11.5.06

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei V der Untervektorraum $V = \{\sum_{i+j \leq n} a_{ij} X^i Y^j \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}[X, Y]$. Seien $D_X, D_Y \in \mathrm{End}(V)$ gegeben durch $D_X(P) = Y\frac{\partial P}{\partial X}$ und $D_Y(P) = X\frac{\partial P}{\partial Y}$, wobei $\frac{\partial}{\partial X}$ die partielle Ableitung bezüglich X bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: D_X und D_Y sind nilpotent.

(b) Finden Sie Polynome $P_1, \dots, P_r \in V$, so dass

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} L_{D_X}(P_i),$$

wobei $L_{D_X}(P_i)$ die lineare Hülle von $\{D_X^k(P_i) : k \geq 0\}$ ist.

(c) Ist $D_X \circ D_Y$ nilpotent?

Aufgabe 2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $a_1, a_2, a_3 \in K$ und sei $\{x_n : n \geq 0\}$ die durch

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_0 = 0, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix}$$

rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie: Es existiert $b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$, so dass eine der folgende Gleichungen für alle $n \geq 3$ gilt:

(i) $x_n = b_1\lambda_1^n + b_2\lambda_2^n + b_3\lambda_3^n$; (ii) $x_n = b_1\lambda_1^n + b_2 n\lambda_1^n + b_3\lambda_2^n$;
(iii) $x_n = b_1\lambda_1^n + b_2 n\lambda_1^n + b_3 n^2\lambda_1^n$.

Aufgabe 3. Finden Sie ein $S \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{C})$, so dass die Matrix

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} S$$

Jordansche Normalform hat.

Aufgabe 4. Es sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Ein f-invarianter Untervektorraum W von V heisst f-irreduzibel wenn gilt: Sind W_1 und W_2 f-invarianter Untervektorräume mit $W = W_1 \oplus W_2$, so folgt $W_1 = \{0\}$ oder $W_2 = \{0\}$. Sei f nilpotent. Zeigen Sie:
W ist f-irreduzibel $\iff$ es existiert ein $v \in V$ mit $W = L_f(v)$.

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Gegeben sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit k und geometrischer Vielfachheit m. Zeigen Sie:

(a) Die elementaren Jordan-Matrizen $J_i(\lambda)$, die in der Jordanschen Normalform von A vorkommen sind eindeutig bestimmt falls $k = m$ oder $m = 1$ gilt.

(b) Ist $k \leq 3$, so legt m die $J_i(\lambda)$ eindeutig fest.

(c) Ist $k \leq 4$, so reicht die Kenntnis von m zur Bestimmung der $J_i(\lambda)$ nicht.

Aufgabe 6. Es sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit dem einzigen Eigenwert 0. Zeigen Sie:

(a) V ist $\mathbb{C}$-Vektorraum $\quad\Rightarrow\quad$ f ist nilpotent.

(b) V ist $\mathbb{R}$-Vektorraum $\quad\not\Rightarrow\quad$ f ist nilpotent.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} \mu & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.