Lederer/Paskunas/Spieß

6. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 18.5.06

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(8 \times 8, \mathbb{R})\,.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

(b) Bestimmen Sie

$$s = \mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{id})^{m+1} + \mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{id})^{m-1} - 2\mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{id})^{m}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $m \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Es gebe ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $V = L(v, f(v), \ldots, f^k(v))$. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p(X) \in K[X]$ existiert mit $g = p(f)$

Aufgabe 3. Sei $(V, <\,,\,>)$ ein unitärer Vektorraum und s ein schiefadjungierter Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

(a) $s - \mathrm{id}$ ist invertierbar,

(b) $u := (s + \mathrm{id})(s - \mathrm{id})^{-1}$ ist unitär, und

(c) $u - \mathrm{id}$ ist invertierbar.

(d) Ist $g \in \mathrm{End}(V)$ unitär und $g - \mathrm{id}$ invertierbar, dann ist $f := (g + \mathrm{id})(g - \mathrm{id})^{-1}$ schiefadjungiert.

Aufgabe 4. Für $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ sei

$$\exp(A) \colon = E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$$

(Diese Reihe konvergiert für jedes A bezüglich der üblichen Norm in $M(n \times n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$; das brauchen Sie nicht zu beweisen). Zeigen Sie:

(a) Ist λ Eigenwert von A, so ist $\exp(\lambda)$ Eigenwert von $\exp(A)$.

(b) Ist A hermitesch, so ist $\exp(A)$ hermitesch. Ist A schiefhermitesch, so ist $\exp(A)$ unitär.

(c) Kommutieren die Matrizen A_1 und A_2, so gilt $\exp(A_1+A_2) = \exp(A_1)\exp(A_2)$.

(d) Ist A normal, so ist $\exp(A)$ das Produkt einer hermiteschen und einer unitären Matrix.

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Sei $(V, <\, ,\, >)$ ein unitärer Vektorraum und f ein normaler Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass $f \circ f^*$ nur reelle Eigenwerte ≥ 0 besitzt.

Aufgabe 6. Sei

$$A \colon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R})\,.$$

(a) Gibt es eine symmetrische Matrix $A_1 \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$, die ähnlich zu A ist?

(b) Gibt es eine hermitesche Matrix $A_2 \in M(5 \times 5, \mathbb{C})$, die das gleiche charakteristische Polynom wie A hat?

(c) Gibt es eine orthogonale Matrix $S \in O(5)$, die die gleichen Eigenwerte wie A hat?

(d) Gibt es eine symmetrische Matrix $A_3 \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$, die das gleiche Minimalpolynom wie A hat?