Lederer/Paskunas/Spieß

7. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben

Abgabe: Do, 1.6.06

Aufgabe 1. Sei

$$A\colon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $X \in O(3)$, so dass $X^t A X$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2. Sei $(V, < , >)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert mit kleinstem Eigenwert λ und grössten Eigenwert μ. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V - \{0\}$ gilt:

$$\lambda \leq \frac{< f(v), v >}{< v, v >} \leq \mu$$

Für welche $v \in V$ steht links oder rechts Gleichheit?

Aufgabe 3. Sei V unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass die Darstellungsmatrix A von f bezüglich dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist. Kann man $(v_1, \ldots, v_n)$ so wählen, dass A die Jordansche Normalform von f ist?

Aufgabe 4. Sei $(V, < , >)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist selbstadjungiert.

(b) Es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ und orthogonale Projektionen $p_1, \ldots, p_r \in \mathrm{End}(V)$ mit den Eigenschaften:
(i) $p_1 + \ldots + p_r = \mathrm{Id}_V$, (ii) $\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r = f$, (iii) $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$ für alle $i \neq j$.

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Gegeben sei $A\colon = \begin{pmatrix} -\cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Matrix $X \in O(2)$ mit

$$X^t A X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie Matrizen $S, T \in U(2)$, so dass die Matrizen $S^H \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} S$ und $T^H \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} T$ Diagonalgestalt haben.

Im Folgenden ist $(V, <\,,\,>)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

Aufgabe 6. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und $v \in V$. Zeigen Sie:

$$f^k(v) = 0 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad f(v) = 0.$$

Aufgabe 7. Ein Endomorphismus f von V heisst *Spiegelung*, wenn es ein $w \in V$ gibt mit $f(v) = s_w(v)\colon = v - 2\frac{<v,w>}{<w,w>} w$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie:

(a) Spiegelungen sind selbstadjungiert und unitär.

(b) Orthogonalprojektionen sind selbstadjungiert, aber i.A. nicht unitär.

Aufgabe 8. $f \in \mathrm{End}(V)$ heisst involutorisch, wenn $f \circ f = \mathrm{Id}_V$. Zeigen Sie: Hat $f \in \mathrm{End}(V)$ zwei der drei Eigenschaften selbstadjungiert, unitär, involutorisch, so hat es auch die dritte.