Lederer/Paskunas/Spieß

8. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Do, 8.6.06

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Polar-Zerlegung der Matrix

$$A\colon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. Sei $B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_m & B \\ B^t & E_n \end{pmatrix} \in M((m+n) \times (m+n), \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
(i) A ist positiv definit.
(ii) $E_n - B^t B$ ist positiv definit.
(iii) Alle Eigenwerte von $B^t B$ sind kleiner als 1.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O(3).$$

Bestimmen Sie ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ und eine Matrix $X \in O(3)$ so, dass

$$X^t A X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit mindestens 3 Elementen, $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über K und X eine Teilmenge von $\mathbb{A}$. Zeigen Sie, dass X genau dann ein affiner Unterraum ist, wenn mit je zwei Punkten P, Q auch die Gerade durch P und Q in X liegt. Bleibt dies auch richtig für $K = \mathbb{F}_2$?

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. (a) Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) .$$

positiv definit ist.

(b) Geben Sie ein positiv definites $B \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$ an.

Aufgabe 6. Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über einem Körper K und g eine Gerade in $\mathbb{A}$. Seien $P_0, P_1, P \in g$ mit $P_0 \neq P_1$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Skalar $\lambda \in K$ mit

$$P = (1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1.$$

Man nennt $\mathrm{TV}(P_0, P_1, P) :\, = \lambda$ das *Teilverhältnis von* P_0, P_1, P.

Zeigen Sie: Sei h eine weitere Gerade in $\mathbb{A}$, die sich genau in P_0 mit g schneidet und seien $P_1, P_2 \in g$ und $Q_1, Q_2 \in h$ von P_0 verschiedene Punkte. Dann gilt:

$$\mathrm{TV}(P_0, P_1, P_2) = \mathrm{TV}(P_0, Q_1, Q_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{P_1 Q_1} \text{ und } \overline{P_2 Q_2} \text{ sind parallel}$$