Lederer/Paskunas/Spieß

9. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 2

I. Hausaufgaben Abgabe: Di, 20.6.06

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{A}$ ein euklidischer affiner Raum. Zwei geraden g, h in $\mathbb{A}$ heissen windschief, wenn sie weder parallel sind noch einen Punkt gemeinsam haben. Für zwei windschiefe Geraden zeige man:

(a) Es gibt genau einen Punkt $P \in g$ und genau einen Punkt $Q \in h$ so dass die Verbindungsgerade $\overline{PQ}$ orthogonal zu g und h ist.

(b) Es gilt $d(P,Q) \leq d(P',Q')$ für alle $P' \in g$ und $Q' \in h$, wobei genau dann Gleichheit gilt, wenn $P = P'$ und $Q = Q'$.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum der Dimension n. Eine Hyperebene in $\mathbb{A}$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n-1$. Gegeben seien zwei verschiedene parallele Hyperebene $\mathbb{H}_1$ und $\mathbb{H}_2$ in $\mathbb{A}$ und ein Punkt O ausserhalb von $\mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$. Man beweise: Es gibt genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, so dass $f(P) \in \mathbb{H}_2$ für alle $P \in \mathbb{H}_1$ und die Punkte $O, P, f(P)$ auf einer Geraden liegen.

Aufgabe. 3 Es sei $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ eine reelle Zahl. Es seien $P, Q \in \mathbb{A}$ Punkte eines euklidischen affinen Raumes der Dimension 2. Man beweise, dass

$$\{X \in \mathbb{A} \mid d(X,P) = \alpha d(X,Q)\}$$

ein Kreis ist.

Aufgabe 4. Sei $(\mathbb{A}, V)$ ein affiner Raum und seien $\mathbb{A}_1$ und $\mathbb{A}_2$ affine Unterräume von $\mathbb{A}$, so dass $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2$ ein Punkt und $V = \{\overrightarrow{PQ} : P \in \mathbb{A}_1, Q \in \mathbb{A}_2\}$

ist. Zu jedem $P \in \mathbb{A}$ sei $\mathbb{A}_1(P)$ der affine Unterraum durch P, der echt parallel zu $\mathbb{A}_1$ ist, d.h. $\mathbb{A}_1(P) = P + U_1$ mit $U\colon = T\mathbb{A}_1$. Man zeige:

(a) Für jedes $P \in \mathbb{A}$ besteht $\mathbb{A}_2 \cap \mathbb{A}_1(P)$ aus genau einem Punkt, der mit $\alpha(P)$ bezeichnen wird.

(b) Die Abbildung $P \mapsto \alpha(P)$ ist affin (man nennt sie die Parallelprojektion von $\mathbb{A}$ auf $\mathbb{A}_2$ längst $\mathbb{A}_1$).

II. Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 5. Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum und $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ eine affine Abbildung. Die Menge der Fixpunkte von f,

$$\mathbb{B} = \{P \in \mathbb{A} : f(P) = P\}$$

sei nicht leer. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$ ist.

Aufgabe 6. Sei ABC ein Dreieck in einem euklidischen affinen Raum $\mathbb{A}$ der Dimension 2. Sei O ein Punkt innerhalb des Dreiecks ABC. Zeigen Sie:

$$O = \frac{|OBC|}{|ABC|}A + \frac{|OAC|}{|ABC|}B + \frac{|OAB|}{|ABC|}C,$$

wobei $|ABC|$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Aufgabe 7. Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum der Dimension n und seien $P_0, \dots P_n \in \mathbb{A}$ Punkte in allgemeiner Lage. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn die Punkte $f(P_0), \dots f(P_n)$ in allgemeiner Lage sind.