Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 10

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 19.01.07

Aufgabe 1. (i) Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und $K_1 < f'(a) < K_2$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$f(a) + hK_1 < f(a + h) < f(a) + hK_2$$

für alle $h \in [0, \delta)$.

(ii) Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und

$$u'(0) = 0, \quad u''(0) > 0, \quad u'' \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty.$$

Aufgabe 2. Sei die Polynomfunktion

$$q(x) = 2x^5 - 10x + 3$$

definiert auf $\mathbb{R}$.

(i) Auf welchen Intervallen ist q wachsend bzw. fallend?

(ii) Wie viele Nullstellen hat q?

Aufgabe 3. (a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ explizit dar:

$$\frac{5 - 2i}{2 - 3i}, \qquad (1 + i)^{-5}, \qquad \frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i}.$$

(b) Berechnen Sie die Polarkoordinatendarstellung $z = r\cos(\phi) + r\sin(\phi)$, $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi[$ der folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$3 - 3i, \qquad \sqrt{3} + i$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ für die gilt:

(a) $\Re(z^2) > 0$.

(b) $|\frac{z-1}{z+1}| \leq 1$.

(c) $|\frac{z-i}{z+i}| \leq 1$.