Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 11

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 26.01.07

Aufgabe 1. Für $x > 0$ sei

$$f(x) = x^{-1} e^{x^2}.$$

An welchen Intervallen ist f wachsend bzw. fallend, konvex bzw. konkav? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f und beschreiben Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to 0^+$ und $x \to \infty$. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Beschreiben Sie die Summe explizit als rationale Funktion von x (für x im Konvergenzintervall $(-R, R)$).

Aufgabe 3. (a) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 4y - z = 5\}, \quad \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 4y - z = 2z\}, \quad \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y \geq x\}.$$

(b) Sei K ein Körper, M eine nicht-leere Menge und $\mathrm{Abb}(M, K)$ die Menge aller Abbildungen $f : M \to K$. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(M, K)$ und $\lambda \in K$ definieren wir

$$\begin{aligned} f + g :& K \to K, z \mapsto (f+g)(z) :\ = f(z) + g(z) \\ \lambda f :& K \to K, z \mapsto (\lambda \cdot f)(z) :\ = \lambda f(z). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(M, K)$ mit dieser Addition und skalaren Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

(c) Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}((a,b),\mathbb{R})$ sind Untervektorräume?

(i) $\{f \in \mathrm{Abb}((a,b),\mathbb{R}) \mid f$ ist 2-mal stetig differenzierbar und $\quad f'' + f = 0\}$.

(ii) $\{f \in \mathrm{Abb}((a,b),\mathbb{R}) \mid f(x^2) = f(x)^2 \quad \forall\, x \in (a,b)\}$.

Aufgabe 4. (a) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$ und geben Sie die Lösungen jeweils in kartesischen Koordinaten, d.h. in der Form $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) und in Polarkoordinaten, d.h. in der Form $z = r(cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi}$ (mit $r \in [0, +\infty)$ und $\phi \in [0, 2\pi)$) an:

(i) $z^2 = 4z - 8$, (ii) $z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$.

(b) Schreiben Sie das Polynom $f(z) = z^3 + 6z^2 + 9z + 2 \in \mathbb{C}[z]$ als Produkt von Linearfaktoren.