Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 12

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 02.02.07

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{\sqrt{n}}\, x^n.$$

Aufgabe 2. (i) Zeigen Sie durch Induktion auf n die Leibnizsche Formel für die n-te Ableitung eines Produkts:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)}.$$

(ii) Berechnen Sie die vierte Ableitung der Funktion $\cos x \cdot e^{-x}$.

Aufgabe 3. (a) Gegeben seien die drei Vektoren $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,1)$ und $v_3 = (0,1,1)$ im $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie, ob (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist.

(b) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien w_1, w_2, w_3 Vektoren von V. Zeigen Sie: Ist (w_1, w_2, w_3) linear unabhängig, so auch $(w_1, w_1 + w_2, w_1 + w_2 + w_3)$.

Aufgabe 4. Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vergleiche Aufgabe 3 (b) von Blatt 11) und seien $f_1, f_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Funktionen $f_1(x) :\, = \sin(x)$ und $f_2(x) :\, = \cos(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass (f_1, f_2) linear unabhängig ist.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $f(x) = \sin(x + \alpha)$. Stellen Sie f als Linearkombination von f_1 und f_2 dar.