Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Ferienblatt

Frøyshov/Spieß

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Antworten Sie mit 'wahr' oder 'falsch'. Falls Sie mit 'falsch' antworten, geben Sie bitte ein Gegenbeispiel.

(i) Falls die Reihe $\sum a_n$ konvergiert, so muss $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+5}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+n^2}$$

und berechnen Sie die dritte Ableitung der Summe in $x = 0$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-5} e^{-\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2)}{\sin^2 x}.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2+x}{3+2x^4} - \log(\sin x + 2).$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Für alle $x > 0$ gelten

$$\sin x < x, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x.$$

Aufgabe 7. Sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_1, \dots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren aus V. Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Antworten Sie mit 'wahr' oder 'falsch'. Falls Sie mit 'falsch' antworten, geben Sie bitte ein Gegenbeispiel.

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig, falls keiner der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ Vielfaches eines anderen ist.

(ii) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear abhängig, falls $v_n \in L(v_1, \dots, v_{n-1})$.

(iii) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig, falls sich jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination von $(v_1, \dots, v_n)$ darstellen lässt.

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 2 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9. Seien U, W Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$ mit $\dim(U) = 4$ und $\dim(W) = 2$. Zeigen Sie, dass $\dim(U \cap W) \geq 1$.

Aufgabe 10. Zerlegen Sie das Polynom $z^3 + z^2 + 5z + 5 \in \mathbb{C}[z]$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 11. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der kartesischen Darstellung $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1+2i}{3-4i}, \quad \frac{i + i^3 + i^5}{1+i}.$$

Aufgabe 12. Entscheiden Sie mit Hilfe des Gauß Algorithmus, ob das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 11x_3 & - & 9x_4 & = & -22 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 13x_4 & = & -26. \end{array}$$

Aufgabe 13. Berechnen Sie die folgende Determinante

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$