Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 2

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Di, 7.11.06

Aufgabe 1. Finden Sie (möglichst einfache) Formeln für die folgenden Summen:

(i) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

(ii) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.

Hinweis: Sie können z.B. die Summen für einige n ausrechnen. Falls Sie eine Gesetzmäßigkeit entdecken, versuchen Sie die entsprechende Formel induktiv zu zeigen. Siehe auch Aufgabe 2 auf Zettel 1.

Aufgabe 2. Ein Punkt $a \in A$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung $f : A \to A$, wenn $f(a) = a$. Falls f keinen Fixpunkt hat, dann heißt f *fixpunktfrei.*

(i) Bestimmen Sie alle fixpunktfreien Permutationen der Mengen $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, und $\{a, b, c, d\}$. Benutzen Sie die Schreibweise $f(a)f(b)f(c)$ für eine Permutation f der Menge $\{a, b, c\}$, so dass z.B. *bac* die Permutation bezeichnet, die a und b vertauscht.

(ii) Sei a_n die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen einer Menge mit n Elementen. Finden Sie eine Formel, die a_n mit Hilfe von n, a_{n-1}, und a_{n-2} ausdruckt, wenn $n \geq 3$. Benutzen Sie diese Formel, um a_9 zu berechnen..

Aufgabe 3. (a) Gegeben seien die Matrizen $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $X \cdot Y$, $Y \cdot X$, $Y \cdot X \cdot Z$ und $X \cdot Z \cdot Y$.

(b) Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Finden Sie alle reellen 2×2-Matrizen B, für die $AB = BA$ gilt.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie ob die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Inversen A^{-1}, B^{-1}.