Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 4

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Di, 21.11.06

Aufgabe 1.

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen und $K > 1$ eine Konstante, so dass $a_{n+1} \geq K a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(ii) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^7}$.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen A sind von oben bzw. von unten beschränkt? Bestimmen Sie ggf. $\sup A$ und $\inf A$.

(i) $A = (-\infty, -1] \cup (2, 5)$.

(ii) $A = [0, 3) \cup \mathbb{Q}$.

(iii) $A = \left\{ \dfrac{n}{n^2 + 9^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $E_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix, deren Eintrag an der Stelle (i, j) gleich 1 ist und deren andere Einträge alle Null sind. Zeigen Sie:

(a) Sei $\widetilde{E} = E_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ eine Elementarmatrix vom Typ 1. Dann gilt für jede $n \times n$-Matrix A:

Die Matrix $\widetilde{E}A$ entsteht aus A durch vertauschen der i-ten und j-ten Zeile.

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{E} = E_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ eine Elementarmatrix vom Typ 2. Dann gilt für jede $n \times n$-Matrix A:

Die Matrix $\widetilde{E}A$ entsteht aus A indem die i-te Zeile mit λ multipliziert wird.