Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 5

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 1.12.06

Aufgabe 1. Welche der folgenden Reihen konvergieren?

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{5}{7}\right)^{3n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,n^{2}}{n^{3}-3n^{2}+5}$

Aufgabe 2. (i) Drucken Sie die Zahlen 23 und 7/5 als dyadische Brüche aus (d.h. als b–adische Brüche mit $b = 2$).

(ii) Ein b–adischer Bruch $\pm\sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ heißt *periodisch*, wenn natürliche Zahlen r, s existieren, so dass $a_{n+r} = a_n$ für alle $n > s$. Zeigen Sie: Genau dann ist ein b–adischer Bruch periodisch, wenn er eine rationale Zahl darstellt.

Aufgabe 3. (a) Sei $A\colon = (0,0)$, $B\colon = (1,-2)$ und $C\colon = (-3,-1)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(-2,1,3)$ und $(-1,0,-3)$.

Hinweis: Sei T ein Tetraeder mit den Eckpunkten $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$, die nicht alle in einer Ebene liegen. Sei F der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C und sei h der Abstand von D von der Ebene durch die Punkte A, B, C. Dann gilt für das Volumen V von T die Formel $V = \frac{1}{3}hF$.

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 & -1 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 21 & 9 & 27 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei A eine $n \times n$-Matrix. Bestimmen Sie $\det(-A)$ in Termen von $\det(A)$.