Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 6

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 8.12.06

Aufgabe 1. (i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{5^n}.$$

(ii) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

Aufgabe 2. Für die folgenden reellen Funktionen f, g, finden Sie einen expliziten Ausdruck für $g(f(x))$:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{3-x}, \quad g(x) = 2x - x^2,$

(ii) $f(x) = x^6, \quad g(x) = \sqrt{x}.$

Hier ist jede Funktion definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Funktionsvorschrift sinnvoll ist.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die Adjunkte A^* der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie $\det(A)$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und berechnen Sie A^{-1}.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

(b) Zeigen Sie, dass für die $n \times n$-Matrizen

$$B_n \colon = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

die folgende Rekursionsformel gilt: $\det(B_n) = 2\det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2})$ (für $n \geq 3$).

(c) Raten Sie eine geschlossene Formel für $\det(B_n)$ und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.