Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 7

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 15.12.06

Aufgabe 1. Für jede natürliche Zahl n sei die Funktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

(i) Zeigen Sie, dass g_n stetig ist.

(ii) Bestimmen Sie die Menge D der reellen Zahlen x, für die der Grenzwert

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

existiert.

(iii) In welchen Punkten ist $g : D \to \mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 2. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \left| \left[x + \tfrac{1}{2} \right] - x \right|,$$

wobei $[y]$ für jede reelle Zahl y die größte ganze Zahl $\leq y$ bezeichnet. Zeichnen Sie den Graphen von f und zeigen Sie:

(i) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $f(x) = |x|$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x+n) = f(x)$.

(iii) f ist stetig.

Aufgabe 3. (a) Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\mathrm{sign}(\sigma_1), \mathrm{sign}(\sigma_2)$ und $\mathrm{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Für $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}, k < m$ bezeichne $\tau_{km} \in S_n$ die Abbildung, die k und m vertauscht, d.h.

$$\tau_{km} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, i \mapsto \begin{cases} i & \text{falls } i \neq k, m, \\ m & \text{falls } i = k, \\ k & \text{falls } i = m. \end{cases}$$

Ein Element von S_n der Form τ_{km} für $1 \leq k < m \leq n$ heisst *Transposition*. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass sich jedes $\sigma \in S_n$ ($n \geq 2$) als Produkt von Transpositionen schreiben lässt.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass eine Transposition $\tau \in S_n$ und ein $\sigma' \in S_n$ mit Fixpunkt n existiert, so dass gilt: $\sigma = \tau \circ \sigma'$).

(c) Schreiben Sie die Permutation σ_1 aus (a) als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch vollständiger Induktion nach n:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (t_j - t_i).$$

wobei das Produkt über alle Paare $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $i < j$ gebildet wird.