Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld — Blatt 8

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 22.12.06

Aufgabe 1. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz–stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

für alle $x, y \in D$. (L heißt dann *Lipschitz–Konstante*.) Seien jetzt f und g Lipschitz–stetige Funktionen auf D. Zeigen Sie:

(i) $f + g$ ist Lipschitz–stetig.

(ii) fg ist Lipschitz–stetig, wenn f und g beschränkt sind, aber nicht im Allgemeinen.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Funktionen sind Lipschitz–stetig?

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|, \\ g &: [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}, \\ h &: [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Es gelte $a \circ a = e$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 4. Prüfen Sie, ob die folgende Mengen mit der Verknüpfung $\star$ Gruppen sind:

(a) $G = \mathbb{R}$, $x \star y = 3x + 4y$.

(b) $G = \mathbb{R}^3$, $x \star y = x \times y$ (Vektorprodukt).

(c) $G = \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2)$. Ist $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (y_1, y_2) \star (x_1, x_2)$?