Übungen zu Mathematik 1 für NWI

Wintersemester 2006/07

Universität Bielefeld
Frøyshov/Spieß

Blatt 9
Abgabe: Fr, 12.01.07

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x}}, \quad \text{wobei } x > 1,$$
$$g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 + 3}}.$$

Aufgabe 2. (i) Seien f und g positive, streng wachsende Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $1/f$ streng fallend und fg streng wachsend ist.

(ii) Für $0 < x < \sqrt[6]{3}$ sei

$$f(x) = \left(\frac{x^8 + 1}{3 - x^6} \right)^7 .$$

Zeigen Sie, dass f streng wachsend ist, und berechnen Sie $g'(1)$, wobei $g = f^{-1}$.

Aufgabe 3. Für eine Primzahl p bezeichne $\mathbb{Z}_p$ den Körper $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mit der Addition

$$i \oplus j = \text{Rest von } i + j \text{ bei der Division durch } p$$

und der Multiplikation

$$i \odot j = \text{Rest von } i \cdot j \text{ bei der Division durch } p.$$

(a) Bestimmen Sie das inverse Element a^{-1} für $a = 2 \in \mathbb{Z}_7$ und $a = 5 \in \mathbb{Z}_7$.

(b) Berechnen Sie $a^5 := a \odot a \odot a \odot a \odot a$ für alle Elemente a von $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 4. Es sei n eine natürliche Zahl mit ihrer Dezimaldarstellung

$$n = a_r 10^r + \ldots + a_1 10 + a_0, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Benutzen Sie das Rechnen modulo 9 und modulo 11 um zu zeigen:

(a) n ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme $a_r + a_{r-1} + \ldots + a_1 + a_0$ durch 9 teilbar ist.

(b) n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Summe $(-1)^r a_r + (-1)^{r-1} a_{r-1} + \ldots - a_1 + a_0$ durch 11 teilbar ist.