Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld — Blatt 10
Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 22.6.07

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktion auf $\mathbb{R}2$:

$$f(x, y) = 3x - x3 - 3xy2.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktion auf $\mathbb{R}3$:

$$f(x, y, z) = x2 + y2 + z2 - 2xyz.$$

Besitzt f ein globales Extremum?

Aufgabe 3. (a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis. Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Abbildung $f : V \to V$, deren Darstellungsmatrix $A\colon = M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f)$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei A die orthogonale Matrix $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 3 & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \\ 2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$. Durch $\mathbb{R}3 \to \mathbb{R}3, x \mapsto Ax$ wird eine Drehung beschrieben.

(i) Bestimmen Sie die Drehachse (Hinweis: Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}3 - \{0\}$ mit $Av = v$).

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel (Hinweis: Berechnen Sie das Bild eines Vektors, der zur Drehachse senkrecht steht).

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$ und sei $w \in V$ mit $\|w\| = 1$. Sei $s_w : V \to V$ die Abbildung $s_w(v) = v - 2 < v, w > w$ (s_w heisst die *orthogonale Spiegelung* an der zu v orthogonalen Hyperebene).

Zeigen Sie:

(a) Für $v \in L(w)$ gilt $s_w(v) = -v$.

(b) Für $v \in L(w)^\perp$ gilt $s_w(v) = v$.

(c) Es gibt eine Orthonormalbasis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, so dass für die Darstellungsmatrix $A\colon = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(s_w)$ gilt:

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(s_w) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) s_w ist eine orthogonale Abbildung.