Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld
Frøyshov/Spieß

Blatt 11
Abgabe: Fr, 29.6.07

Aufgabe 1. Eine kleine Spinne kriecht am Boden eines Wohnzimmers und spürt eine Hitzequelle in der Nähe. Die Temperatur (in Celsius) am Boden ist zum aktuellen Zeitpunkt in passenden Koordinaten durch die Funktion

$$T(x, y) = 20 + \frac{4x}{x^2 + y^2}$$

gegeben, und die Spinne befindet sich im Punkt $(1, 2)$. In welcher Richtung muss sich die Spinne bewegen, um der Hitze schnellstmöglich zu entkommen? (Unter einer Richtung verstehen wir hier ein Vektor der Länge 1.)

Aufgabe 2. (i) Beschreiben Sie explizit eine Funktion $y = f(x)$, die die Gleichungen

$$xy' + y = x \cos x, \qquad f(1) = 2$$

erfüllt. Was ist das größte Intervall, auf dem es eine Lösung existiert? Ist die Lösung auf diesem Intervall eindeutig?

(ii) Für jede der folgenden Gleichungen für eine Funktion $y = f(x)$ finden Sie eine Basis des Lösungsraumes:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$
$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

und eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A (bzgl. des Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$). Finden Sie eine orthogonale 3×3-Matrix T, so dass $T^t AT$ Diagonalgestalt besitzt.

Aufgabe 4. Sei $< \ , \ >$ das Standard-Skalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^2$.

(a) Für $\phi \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \phi < 2\pi$ sei

$$A \colon = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$$

Geben Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^2$ der Länge 1 an, so dass gilt:

$$v - 2 < v, w > w = A \cdot v$$

für alle $v \in \mathbb{R}^2$ (d.h. A beschreibt eine orthogonale Spiegelung mit Spiegelungsachse $L(w)^\perp$; vergl. Aufgabe 4, Blatt 10).

(b) Seien $s_1, s_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ orthogonale Spiegelungen und $\phi \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi < \pi$ der Winkel, der von den beiden Spiegelungsachsen eingeschlossen wird. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderschaltung $s_1 \circ s_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung ist und geben Sie den Drehwinkel an.