Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld
Frøyshov/Spieß

Blatt 2
Abgabe: Fr, 27.04.07

Aufgabe 1. Sei f eine integrierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, und c ein Punkt in $[a, b]$. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \neq c$. Zeigen Sie, dass g integrierbar ist und

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Aufgabe 2. Sei

$$f(x) := \begin{cases} x^5, & x \leq 0, \\ \frac{1}{1+x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Beschreiben Sie die Funktion

$$F(x) := \int_{-1}^x f$$

explizit. In welchen Punkten ist F differenzierbar?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und W ein weiterer K-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren aus V und $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren aus W. Zeigen Sie:

(a) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, so gibt es mindestens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem es mehr als eine solche Abbildung gibt.

(a) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V, so gibt es höchstens eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem es keine solche Abbildung gibt.

Aufgabe 4. (a) Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 : = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 : = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 : = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 \colon = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 \colon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 \colon = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{\underline{w}}^{\underline{v}}$ wobei $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

(b) Sei $f \colon = \ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch $A \colon = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung, d.h.

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(f)$ von f bzgl. der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$ aus Teil (a).