Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld — Blatt 5

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 18.5.07

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen im Punkt $a = 0$:

$$\frac{1}{2-x}, \qquad \frac{x}{1-x^2}, \qquad \log(1+x^2), \qquad \sin^2 x.$$

(Hinweis für die letzte Funktion: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.) Für welche x konvergiert die Taylor-Reihe gegen die gegebene Funktion?

(ii) Sei die Funktion f dreimal differenzierbar in einer Umgebung von 0, mit $f(0) = 0$, $f'(0) = a \neq 0$, $f''(0) = b$, $f'''(0) = c$. Zeigen Sie, dass f in einer (vielleicht kleineren) Umgebung U von 0 injektiv ist. Sei $g : f(U) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $f|_U$. Drucken Sie die ersten drei Ableitungen von g in 0 mithilfe von a, b, c aus.

Hinweis: Differenzieren Sie die Gleichung $g(f(x)) = x$ dreimal.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$$

mit einem Fehler von $< 10^{-5}$.

Hinweis: Benutzen Sie das Taylor-Polynom n–ter Ordnung von $\sin t$ (wobei n zu bestimmen ist), und schätzen Sie das Restglied ab.

Aufgabe 3. (a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und seien $v\colon = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w\colon = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Winkel $\phi \in [0, \pi]$ zwischen den beiden Vektoren v und w und den Abstand von v und w.

(b) Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >\colon = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2.$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Skalarprodukt definiert wird.

Aufgabe 4. (a) Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$ und zugehöriger Normfunktion $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ für $v \in V$. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

gilt.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\|.\|_\infty : V \to \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \|v\|_\infty : \ = \max(|x|, |y|)$. Zeigen Sie, dass $\|.\|_\infty$ eine Norm auf V ist, d.h. für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\|v\|_\infty = 0$ genau dann wenn $v = 0$.
(2) $\|\lambda v\|_\infty = |\lambda| \, \|v\|_\infty$.
(3) $\|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

(c) Gilt die Parallelogrammgleichung auch wenn $V = \mathbb{R}^2$ und $\|.\| = \|.\|_\infty$ gewählt wird?