Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld
Frøyshov/Spieß

Blatt 6
Abgabe: Fr, 25.5.07

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Taylor-Polynome dritter Ordnung um 0 von den Funktionen

$$\frac{1}{2+\arctan x}, \qquad \frac{\log(1+x)}{2+\arctan x}.$$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Integrale konvergieren?

$$\int_{(-3)^+}^{0^-} \frac{dx}{x(x+3)^2}, \qquad \int_1^{2^-} \frac{\sin x}{\sqrt{2-x}}\,dx, \qquad \int_1^{\infty} \frac{(\log x)^4}{e^x}\,dx.$$

Aufgabe 3. (a) Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$ und $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$M^{\perp} :\ = \{v \in V \mid < v, w >= 0 \ \ \forall\, w \in M\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und sei $V = C([-a,a])$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$< f, g >:\ = \int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx$$

und sei $U :\ = \{f \in C([-a,a]) \mid f(-x) = -f(x)\,\forall\, x \in [-a,a]\}$ der Untervektorraum aller ungeraden Fuktionen. Bestimmen Sie $U^{\perp}$.

Aufgabe 4. Finden Sie eine Orthonormalbasis der folgenden euklidischen Vektorräume.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >:\ = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2.$$

(vgl. Aufgabe 3 (b), Blatt 5).

(b) $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (der Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$) mit dem Skalarprodukt

$$< f, g >: = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$