Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld — Blatt 7

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 1.6.07

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung stetig ist:

$$\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy.$$

(ii) Seien

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

und

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^y.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_1\partial_2 f$, und $\partial_2\partial_1 f$.

Aufgabe 2. (i) Für welche reellen Zahlen s konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

(ii) Sei $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ eine fallende Funktion. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$L := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\, dx \right)$$

existiert, und dass

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \leq L \leq f(1).$$

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die (komplexen) Eigenwerte der folgenden Matrizen

$$A\colon = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B\colon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $C\colon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine invertierbare 3×3-Matrix S, so dass $S^{-1}CS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ zwei verschiedene Eigenwerte von f. Sei $v_1 \in V - \{0\}$ bzw. $v_2 \in V - \{0\}$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1 bzw. λ_2. Zeigen Sie, dass $v_1 + v_2$ kein Eigenvektor von f ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) Jeder Vektor $v \in V - \{0\}$ ist ein Eigenvektor von f.

(ii) Es gibt ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \, \mathrm{Id}_V$.