Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld — Blatt 8

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 8.6.07

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Falls $\partial_2 f = 0$, so ist $f(x, y) = g(x)$ für eine passende Funktion g.

(ii) Falls $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ stetig sind und $\partial_1\partial_2 f = 0$, so ist

$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$

für passende stetig differenzierbare Funktionen g, h.

Aufgabe 2. Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{wenn } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Für welche $(v, w), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $D_{(v,w)} f(x, y)$?

(ii) In welchen Punkten ist f stetig bzw. differenzierbar?

Hinweis: Setzen Sie $x := ay^2$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die geometrischen Vielfachheiten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 17 & -42 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar? Ist B diagonalisierbar?

Aufgabe 4. (a) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f_1 \circ \ldots \circ f_r)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f_1)) + \ldots + \dim(\mathrm{Ker}(f_r)).$$

(b) Sei $A \in M(n \times n, K)$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die (verschiedenen) Eigenwerte von A. Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn gilt:

$$(\lambda_1 E_n - A) \cdot \ldots \cdot (\lambda_r E_n - A) = 0$$