Übungen zu Mathematik 2 für NWI

Sommersemester 2007

Universität Bielefeld — Blatt 9

Frøyshov/Spieß — Abgabe: Fr, 15.6.07

Aufgabe 1. Wir betrachten differenzierbare Abbildungen $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Ableitung $(f \circ \gamma)'(0)$ in den folgenden Fällen:

(i) $\gamma(t) = (e^{-t}, \arcsin t, \arccos t)$ und $\nabla f(1, 0, \pi/2) = (2, 3, -1)$.

(ii) $\gamma(0) = (1, 2, 0)$, $\gamma'(0) = (4, 7, -2)$, und $f(x, y, z) = z + y \log(1 + x^2)$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x \sin y, \arctan(x + 2z)).$$

(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jf(x, y, z)$.

(ii) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Abbildung mit

$$g(0, 0) = (1, 0, 0), \qquad Jg(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J(f \circ g)(0, 0)$.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und der zugehörigen Normfunktion $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$.

(a) Sei U die Ebene

$$U :=\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - y + 3z = 0\}$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(b) Sei $v := \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf U. Berechnen Sie $p_U(v)$.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und $u \in U$ gilt:

$$\|v - p_U(v)\| \leq \|v - u\|$$

(d.h. $p_U(v)$ ist der Punkt auf U, der zu v am nächsten liegt).

Aufgabe 4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & 2 & & & \\ & & & & & & & 9 & 1 & \\ & & & & & & & & 9 & 1 \\ & & & & & & & & & 9 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von A. Geben Sie jeweils eine Basis der Eigenräume an.