1 Euklidische und unitäre Vektorräume

In diesem Abschnitt betrachten wir reelle und komplexe Vektorräume mit Skalarprodukt. Dieses erlaubt uns die Länge eines Vektors zu definieren und (im Fall eines reellen Vektorraums) den Winkel zwischen zwei Vektoren zu erklären.

Beispiel 1 Wir beginnen mit dem aus der Schulmathematik bekannten Beispiel des (Standard-)Skalarprodukts in der Anschauungsebene $V = \mathbb{R}^2$. Sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Satz des Pythagoras ist die Länge $\|v\|$ von v gegeben durch

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein weiterer Vektor. Die Länge von $v + w$ lässt sich durch die Längen von v und w und den Winkel $\phi \in [0, \pi]$ zwischen v und w ausdrücken:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\cos(\phi)\|v\|\|w\|. \tag{1}$$

Der Term $< v, w >: = \cos(\phi)\|v\|\|w\|$ wird als das *Skalarprodukt* von v und w bezeichnet. Ist $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ so gilt

$$\|v + w\|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + 2(x_1y_1 + x_2y_2)$$

und damit

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} >= x_1y_1 + x_2y_2. \tag{2}$$

Es gilt also

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}, \qquad \text{und} \qquad \cos(\phi) = \frac{< v, w >}{\|v\|\|w\|}$$

d.h. sowohl die Länge eines Vektors v als auch der Winkel zwischen zwei Vektoren $v, w \neq 0$ im $\mathbb{R}^2$ lassen sich in Termen des Skalarprodukts beschreiben.

Das (Standard-)Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ Analog zu (2) ist das (Standard-)Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^n$ (für $n \geq 3$) erklärt.

Definition 1 *Seien* $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. *Das (Standard-)Skalarprodukt ist definiert durch*

$$< v, w >: \; = v^t \cdot w = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

Man rechnet leicht nach, dass dieses Produkt die folgenden Eigenschaften besitzt.

Lemma 2 *Für alle* $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(a) $< v_1 + v_2, w >=< v_1, w > + < v_1, w >, \quad < \lambda v, w >= \lambda < v, w >,$
$< v, w_1 + w_2 >=< v, w_1 > + < v, w_2 >, \quad < v, \lambda w >= \lambda < v, w >.$
(Bilinearität)

(b) $< v, w >=< w, v >$ *(Symmetrie).*

(c) $< v, v > \geq 0$ *und* $< v, v >= 0$ *genau dann wenn* $v = 0$ *ist (man nennt diese Eigenschaft positive Definitheit).*

Wegen Eigenschaft (a) können wir die nicht-negative Wurzel aus $< v, v >$ ziehen. Die Zahl

$$\|v\|: \; = \sqrt{< v, v >}$$

heißt die *Länge* oder *(euklidische) Norm* von $v \in \mathbb{R}^n$.

Seien v, w zwei, vom Nullvektor verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir wollen jetzt den *Winkel* $\phi \in [0, \pi$ zwischen v und w erklären. Motiviert durch das Beispiel des $\mathbb{R}^2$ definieren wir ϕ als die eindeutig bestimmte Zahl in $[0, \pi]$ mit

$$\cos(\phi) = \frac{< v, w >}{\|v\| \|w\|}. \tag{3}$$

Beachten Sie, dass der Cosinus auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend (und stetig) ist und folglich $\cos|_{[0,\pi]}: [0, \pi] \to [-1, 1]$ nach dem Zwischenwertsatz bijektiv ist. Das die rechte Seite von (3) zwischen -1 und 1 liegt ergibt sich aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3 *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$|<v,w>| \;\leq\; \|v\|\|w\|. \tag{4}$$

Beweis. Für $w = 0$ sind beide Seiten $= 0$.

Sei also $w \neq 0$. Nach Lemma 2 gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rll} 0 & \leq \;<v-\lambda w, v-\lambda w> & \text{positive Definitheit} \\ & = \;<v, v-\lambda w> -\lambda <w, v-\lambda w> & \text{Bilinearität} \\ & = \;<v,v> -\lambda <v,w> -\lambda <w,v> -\lambda^2 <w,w> & \text{Bilinearität} \\ & = \;<v,v> -2\lambda <v,w> -\lambda^2 <w,w> & \text{Symmetrie.} \end{array}$$

Wähle speziell $\lambda = \frac{<v,w>}{<w,w>}$ (man beachte, dass der Nenner $<w,w>> 0$, da $w \neq 0$) Wir erhalten:

$$0 \;\leq <v,v> -2\left(\frac{<v,w>}{<w,w>}\right) <v,w> +\left(\frac{<v,w>}{<w,w>}\right)^2 <w,w>=$$

$$=<v,v> - \frac{<v,w>^2}{<w,w>}.$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit $<w,w>$ so erhält man:

$$<v,w>^2 \leq <v,v><w,w> .$$

und damit (4) durch ziehen der Wurzeln. □

Skalarprodukt auf beliebigen reellen Vektoräumen Wie im letzten Abschnitt erläutert wurde, lässt sich mit Hilfe des Standardskalarprodukt Längen- und Winkelmessung im $\mathbb{R}^n$ durchführen. Um in beliebigen reellen Vektorräumen auch Begriffe wie "die Länge eines Vektors" oder den "Winkel zwischen zwei Vektoren" zu erklären, führen wir jetzt Skalarprodukte axiomatisch ein (ohne Bezugnahme auf die Wahl eines Koordinatensystems).

Definition 4 *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung*

$$< \; , \; >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v,w) \mapsto <v,w>$$

heisst Skalarprodukt auf V, wenn $< \; , \; >$ bilinear, symmetrisch und positiv definit ist, d.h. wenn gilt:

(a) $<v_1+v_2, w>=<v_1,w>+<v_1,w>, \quad <\lambda v, w>= \lambda <v,w>,$
$<v, w_1+w_2>=<v,w_1>+<v,w_2>, \quad <v, \lambda w>= \lambda <v,w> .$

(b) $<v,w>=<w,v>$

(c) $<v,v> \geq 0 \quad , \quad <v,v>= 0 \Leftrightarrow v = 0$

für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V heisst euklidischer Vektorraum.

Beispiele 1 (a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Für $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n, w = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n \in V$ setzten wir

$$< v, w >: = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Dann ist $< \ , \ >$ ein Skalarprodukt auf V und es gilt

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \text{ ist;} \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \text{ ist.} \end{cases}$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $C([a, b])$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Durch

$$< f, g >: = \int_a^b f(t)g(t)\, dt.$$

wird ein Skalarprodukt auf $C([a, b])$ definiert.

Definition 5 *Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$. Die Abbildung*

$$\| \,.\, \| : V \longrightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|: = \sqrt{< v, v >}$$

heisst die (durch $< \ , \ >$ induzierte) Norm.

Lemma 6 *Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$ und zugehöriger Norm $\| \,.\, \|$. Dann gilt für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:*

(a) (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) $\quad | < v, w > | \leq \|v\|\|w\|$.

(b) $\|v\| \geq 0, \qquad \|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$.

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$.

(c) (Dreiecksungleichung) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beweis. (a) Der Beweis von Lemma 3 lässt sich wortwörtlich auf den Fall eines beliebigen Skalarprodukts übertragen.

(b), (c) sind trivial.

(d) $\qquad \|v+w\|^2 = < v+w, v+w > =$

$$= < v,v > + < v,w > + < w,v > + < w,w > \leq \|v\|^2 + 2 < v,w > + \|w\|^2 \leq$$

$$\leq \|v\|^2 + 2| < v,w > | + \|w\|^2 \overset{(a)}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

$\square$

Teil (a) des folgenden einfachen Lemma zeigt, dass man das Skalarprodukt aus der Norm rekonstruieren kann.

Lemma 7 *Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$ und induzierter Norm $\| \, . \, \|$. Für $v, w \in V$ gilt:*

(a) $< v,w > = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$.

(b) (Parallelogrammgleichung) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

Bemerkungen 8 (a) Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\| \, . \, \| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit den Eigenschaften (b), (c) und (d) aus Lemma 6 heisst eine *Norm auf* V. Ein Skalarprodukt $< \ , \ >$ definiert also eine Norm. Es gibt aber Normen, die nicht von Skalarprodukten herrühren (Beispiel: $\|v\|_1 := |x_1| + \ldots + |x_n|$, $v = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$; vgl. Übung ..., Blatt ...).

(b) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\| \, . \, \|$ eine Norm auf V. Für $v, w \in V$ setzen wir $d(v,w) := \|v - w\|$. Man nennt die Abbildung $(v,w) \mapsto d(v,w)$ den (aus $\| \, . \, \|$ erhaltenen) *Abstand* (oder *Metrik*). Für $u, v, w \in V$ gilt:

$(M1)$	$d(v,w) \geq 0,$	$d(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w$	
$(M2)$	$d(v,w) = d(w,v)$		
$(M3)$	$d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$		(Dreiecksungleichung)

Eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1)–(3) nennt man einen *metrischen Raum* (die Abbildung d heisst eine *Metrik auf* M). Man beachtet, dass nicht jede Metrik auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum aus einer Norm entsteht (ein ganz einfaches Beispiel ist die Metrik $d(v,w) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } v = w \text{ ist;} \\ 1 & \text{wenn } v \neq w \text{ ist.} \end{cases}\Bigg)$.

Definition 9 *Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \ , \ >$.*
(a) Seien $v, w \in V - \{0\}$. Nach Lemma 6 (a) gilt $-1 \leq \frac{<v,w>}{\|v\|\|w\|} \leq 1$. Es gibt

daher ein eindeutig bestimmtes $\phi \in [0, \pi]$ mit $\cos(\phi) = \frac{<v,w>}{\|v\|\|w\|}$. Man nennt ϕ den Winkel zwischen v und w.

(b) Zwei Vektoren v, w heissen orthogonal oder senkrecht aufeinander stehend (Notation: $v \perp w$) falls gilt $< v, w >= 0$ (wenn $v \neq 0 \neq w$ ist also $v \perp w \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$).

(c) Sei U ein Untervektorraum von V. Die Menge $U^\perp : = \{v \in V \mid < v, u >= 0 \,\forall\, u \in U\}$ heisst das orthogonale Komplement von U.

Bemerkungen 10 (a) Für $v, w \in V$ gilt nach Lemma 7 (a):

$$v \perp w \quad \Longleftrightarrow \quad \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

(b) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. $U^\perp$ ist ebenfalls ein Untervektorraum. Ist V endlich-dimensional so gilt $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ und $(U^\perp)^\perp = U$ (den Beweis werden wir später nachholen).

Definition 11 *Sei $V, < \ , \ >$ wie oben. Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V heisst Orthonormalsystem, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:*

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \text{ ist;} \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \text{ ist.} \end{cases}$$

d.h. die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ stehen paarweise senkrecht aufeinander und haben alle die Länge 1 (wir nennen einen solchen Vektor auch normiert).

$(v_1, \ldots, v_n)$ heisst Orthonormalbasis, wenn $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Orthonormalsystem und eine Basis von V ist.

Beispiele 2 (a) Die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ ist eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^n$ (bzgl. des Standardskalarprodukts).

(b) Sei $V = C([0, 2\pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$< f, g > : = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, dt.$$

(vgl. Beispiel 1 (b)). Für $k, l \in \mathbb{N}$ gelten:

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kt) \sin(lt) \, dt = 0$

(6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(kt) \sin(lt) \, dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt) \cos(lt) \, dt = 0 \quad \text{falls } k \neq l.$

(7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(kt)^2 \, dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt)^2 \, dt = \pi$

Also bilden je n Funktionen aus der Menge

$$\{1\} \cup \{\sin(kt) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(lt) \mid l \in \mathbb{N}\}$$

ein Orthonormalsystem (1 bezeichnet hier die konstante Funktion $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto 1$).

Satz 12 *Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \, , \, >$ und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren in V.*

(a) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Orthonormalsystem, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig.

(b) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Orthonormalsystem und $U :\, = L(v_1, \ldots, v_n)$. Dann gilt für jedes $v \in V$:

$$v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i \in U^{\perp}$$

(c) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis, so gilt $v = \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$ für alle $v \in V$ (d.h. $< v, v_1 >, \ldots, < v, v_n > \in \mathbb{R}$ sind die Koordinaten von v bzgl. $(v_1, \ldots, v_n)$).

Beweis. (a) Aus $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_1 v_n = 0$ folgt:

$$0 =< v_i, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, v_i >= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < v_i, v_j >= \lambda_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$< v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i, v_j >=< v, v_j > - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i >< v_i, v_j >$$

$$=< v, v_j > - < v, v_j >= 0$$

d.h. $v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$ steht senkrecht auf jedem der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Folglich steht $v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$ senkrecht auf jeder Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_n)$.

(c) Sei jetzt $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis und $v \in V$. Nach Teil (b) liegt $v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$ im orthogonalen Komplement von $L(v_1, \ldots, v_n)$, d.h. der Vektor $v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$ steht senkrecht auf jedem $w \in V$. Also auch auf sich selbst:

$$< v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i, v - \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i >= 0$$

und daher (aufgrund der positiven Definitheit des Skalarprodukts)
$v = \sum_{i=1}^{n} < v, v_i > v_i$. $\square$

Im nächsten Satz lernen wir ein Verfahren kennen, dass uns erlaubt aus einer gegebenen Basis von V eine Orthonormalbasis zu gewinnen. Insbesondere folgt, dass jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum eine Orthonormalbasis besitzt.

Satz 13 *(Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren) Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $<\ ,\ >$ und sei $(w_1, \ldots, w_n)$ ein linear unabhängiges n-Tupel von Vektoren in V. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $(v_1, \ldots, v_n)$ mit*

$$L(v_1, \ldots, v_i) \quad = \quad L(w_1, \ldots, w_i)$$

für $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere gilt: Ist $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n.

Im Fall $n = 1$ setzen wir $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1$. Wegen $\|v_1\| = \frac{1}{\|w_1\|}\|w_1\| = 1$ ist v_1 normiert und es gilt $L(v_1) = L(w_1)$.

Induktionsschluss $n - 1 \to n$ (für $n \geq 2$): Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es ein Orthonormalsystem $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ mit $L(v_1, \ldots, v_i) = L(w_1, \ldots, w_i)$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Setze

$$\widetilde{v}_n :\ = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} < w_n, v_i > v_i.$$

Nach Satz 12 (b) und der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\widetilde{v}_n \in L(v_1, \ldots, v_{n-1})^{\perp} = L(w_1, \ldots, w_{n-1})^{\perp}$$

Es ist $\widetilde{v}_n \neq 0$, denn sonst würde $w_n = \sum_{i=1}^{n-1} < w_n, v_i > v_i \in L(v_1, \ldots, v_{n-1}) = L(w_1, \ldots, w_{n-1})$ gelten. Das steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(w_1, \ldots, w_n)$.

Es folgt $\|\widetilde{v}_n\| \neq 0$. Wir setzen $v_n = \frac{1}{\|\widetilde{v}_n\|}\widetilde{v}_n$, so dass $\|v_n\| = 1$ ist. Wegen $\widetilde{v}_n \perp v_i$ gilt auch $v_n \perp v_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$, d.h. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein Orthonormalsystem. Da sich $\widetilde{v}_n$ und w_n nur um eine Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ unterscheiden erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} L(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) &= L(v_1, \ldots, v_{n-1}, \widetilde{v}_n) = L(v_1, \ldots, v_{n-1}, w_n) \\ &= L(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 14 Um eine Orthonormalbasis aus einer vorgegebenen Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ zu konstruieren kann man also den folgenden Algorithmus benutzen. Man definiert rekursiv die beiden endlichen Folgen $\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ durch

$$\widetilde{v}_1 : = w_1, \quad \widetilde{v}_i : = w_i - \sum_{i=1}^{n-1} < w_n, v_i > v_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \text{ und}$$

$$v_i : = \frac{1}{\|\widetilde{v}_i\|}\widetilde{v}_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Der obige Beweis zeigt, dass $\|\widetilde{v}_i\| \neq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist dann die gesuchte Orthonormalbasis.

Skalarprodukt auf komplexen Vektoräumen

Definition 15 *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung*

$$< \ , \ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, (v, w) \mapsto < v, w >$$

heisst hermitesches Skalarprodukt auf V, wenn gilt:

(a) Für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} &< v_1 + v_2, w > = < v_1, w > + < v_1, w >, \quad < \lambda v, w > = \lambda < v, w >, \\ &< v, w_1 + w_2 > = < v, w_1 > + < v, w_2 >, \quad < v, \lambda w > = \overline{\lambda} < v, w > . \end{aligned}$$

(hierbei bezeichnet $\bar{z}$ das komplex Konjugierte von $z \in \mathbb{C}$).

(b) $< \ , \ >$ ist hermitesch, d.h. $< v, w > = \overline{< w, v >}$ für alle $v, w \in V$.

(c) $< \ , \ >$ ist positiv definit, d.h. für $v \in V$ gilt:

$$< v, v > \geq 0, \qquad < v, v > = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem hermiteschen Skalarprodukt auf V heisst unitärer Vektorraum.

Bemerkung 16 Die Eigenschaft (a) wird als *Sesquilinearität* bezeichnet. $<\ ,\ >$ ist also linear im ersten und *semilinear* im zweiten Argument.

Beispiele 3 *Seien* $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. *Durch*

$$< z, w >: = z_1\bar{w}_1 + \ldots + z_n\bar{w}_n = \sum_{i=1}^{n} z_i\bar{w}_i \in \mathbb{C}$$

ist auf $V = C^n$ *ein hermitesches Skalarprodukt definiert.*

Sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $<\ ,\ >$. Die Norm $\|v\|$ eines Vektors $v \in V$ ist wieder durch $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ definiert (man beachte, dass $< v, v >$ eine nicht-negative reelle Zahl ist). Es gelten analog die Aussagen von Lemma 6. Wir beweisen hier nur die Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung für ein hermitesches Skalarprodukt.

Zunächst bemerken wir, dass man V auch als reellen Vektorraum auffassen kann indem man die Skalarmultiplikation $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ einfach auf reelle Skalare λ einschränkt. Wir benutzen die Bezeichnung $V_{\mathbb{R}}$, wenn wir V nur als reellen Vektorraum betrachten. Man rechnet leicht nach, dass der Realteil $< v, w >_{\mathbb{R}}: = \mathrm{Re}(< v, w >)$ ein Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$ ist. Die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung gilt also für $<\ ,\ >_{\mathbb{R}}$, d.h. für $v, w \in V$ gilt:

$$| < v, w >_{\mathbb{R}} | \leq \sqrt{< v, v >_{\mathbb{R}}}\sqrt{< w, w >_{\mathbb{R}}}. \tag{8}$$

Wegen $< v, v > \in \mathbb{R}$, also $< v, v >_{\mathbb{R}} = < v, v >$ (und ebenso $< w, w >_{\mathbb{R}} = < w, w >$) ist die rechte Seite $= \|v\|\|w\|$. Ist $< v, w > \in \mathbb{R}$, so ist die linke Seite der Ungleichung (8) $= | < v, w > |$. Falls $< v, w > \notin \mathbb{R}$ setzen wir $\lambda: = \frac{|< v,w >|}{< v,w >} \in \mathbb{C}$ und $v^*: = \lambda v$. Dann gilt:

$$< v^*, w > = \lambda < v, w > = | < v, w > | \in \mathbb{R}, \ < v^*, v^* > = \lambda\overline{\lambda} < v, v > = < v, v >$$

da $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. Wir erhalten:

$$| < v, w > | = < v^*, w > = < v^*, w >_{\mathbb{R}} \overset{(8)}{\leq} \|v^*\|\|w\| = \|v\|\|w\|.$$

Hierbei haben wir (8) für v^* und w (anstelle von v und w) benutzt. $\square$

Man definiert die Begriffe *orthogonal, othogonales Komplement, Orthonormalsystem* und *Orthonormalbasis* für unitäre Vektorräume ganz analog wie im Fall von euklidischen Vektorräumen. Die Sätze 12 und 13 gelten wortwörtlich auch für unitäre Vektorräume.