Lösung Aufgabe 3, Übung 2

Vorbemerkung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $U \in \mathcal{O}_{\leq}$ genau dann, wenn für alle $y \in U$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow x \in U$.

(2) $U \in \mathcal{O}_{<}$ genau dann, wenn für alle $y \in U$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y + \delta \Rightarrow x \in U$.

Sei jetzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

f heisst nach oben halbstetig, wenn zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow f(y) < f(x) + \epsilon$$

f heisst nach rechts lokal-konstant, wenn es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \leq y < x + \delta \Longrightarrow f(y) = f(x)$$

Es gilt nun:

(3) f ist stetig als Abbildung $Z \to Y \iff f$ ist monoton wachsend;

(4) f ist stetig als Abbildung $Z \to Z \iff f$ ist monoton wachsend;

(5) f ist stetig als Abbildung $Y \to Y \iff f$ ist monoton wachsend und nach oben halbstetig;

(6) f ist stetig als Abbildung $Y \to Z \iff f$ ist monoton wachsend und nach rechts lokal-konstant.

Wir zeigen zunächst

Beweis von (3). $\Rightarrow$ Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Angenommen $a\colon = f(x) > f(y)$. Nach Voraussetzung gilt $U\colon = f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{O}_{\leq}$. Wegen $f(y) < a$ gilt $y \in U$ und $x \notin U$ im Widerspruch zu (1).

$\Leftarrow$ Sei $a \in \mathbb{R}$ und setze $U\colon = f^{-1}((-\infty, a))$. Sei $y \in U$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Es folgt $f(x) \leq f(y) < a$ (da wir annehmen, dass f monoton ist), d.h. $x \in U$ und damit $U \in \mathcal{O}_{\leq}$ (nach (1)). Also ist $f : Z \to Y$ stetig.

Beweis von (4). $\Rightarrow$ Wegen $\mathcal{O}_{<} \subseteq \mathcal{O}_{\leq}$ ist $Z \xrightarrow{\mathrm{id}} Y$ stetig. Folglich ist f auch stetig als Abbildung $f = \mathrm{id} \circ f : Z \to Z \to Y$. Nach (3) ist f monoton wachsend.

$\Leftarrow$ Sei $a \in \mathbb{R}$ wir haben oben bereits gezeigt, dass $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{O}_{\leq}$. Es bleibt zu zeigen: $U\colon = f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{O}_{\leq}$. Sei $y \in U$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gilt $f(x) \leq f(y) \leq a$ (wegen f monoton), d.h. $x \in U$ und damit $U \in \mathcal{O}_{\leq}$ (nach (1)). Also ist $f : Z \to Z$ stetig.

Beweis von (5). $\Rightarrow$ Da $Z \xrightarrow{\mathrm{id}} Y$ stetig ist, ist auch $Z \xrightarrow{\mathrm{id}} Y \xrightarrow{f} Y$ stetig, d.h. f ist stetig als Abbildung $Z \to Y$. Nach (3) ist f monoton wachsend. Da $\mathcal{O}_{<}$ in der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$ enthalten ist, ist $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{id}} Y \xrightarrow{f} Y$ stetig ($\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie), d.h. f ist als Abbildung $\mathbb{R} \to Y$ stetig und damit nach Aufgabe 2 (b) nach oben halbstetig.

$\Leftarrow$ Sei $a \in \mathbb{R}$ und setze $U\colon = f^{-1}((-\infty, a))$. Sei $y \in U$ und setze $\epsilon\colon = a - f(y)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta > 0$ mit $|x - y| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(y) + \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y + \delta$ gilt dann $f(x) < a$, denn entweder ist $x \leq y$ und damit $f(x) \leq f(y) < a$ (da f monoton wachsend ist) oder $|x - y| < \delta$ und dann $f(x) < f(y) + \epsilon = a$. Es folgt $x \in U$ und damit $U \in \mathcal{O}_{<}$ (nach (2)).

Beweis von (6). $\Rightarrow$ Wegen der Stetigkeit von $Z \xrightarrow{\mathrm{id}} Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{\mathrm{id}} Y$ folgt wieder aus (3), dass f monoton wächst. Wir zeigen, dass f nach rechts lokalkonstant ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und setze $b = f(x)$. Dann gibt es a_1, a_2 mit $-\infty \leq a_1 < a_2 \leq +\infty$ mit $(-\infty, a_1) = f^{-1}((-\infty, b)) \subset f^{-1}((-\infty, b]) = (-\infty, a_2)$. Wegen $x \in f^{-1}((-\infty, b]) - f^{-1}((-\infty, b)) = [a_2, a_1)$ gilt $a_1 \leq x < a_2$. Wähle $\delta > 0$ mit $x + \delta < a_2$. Für $y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y < x + \delta$ folgt $y \in f^{-1}((-\infty, b]) - f^{-1}((-\infty, b))$, d.h. $f(y) = b$.

$\Leftarrow$ Da eine monoton wachsend und nach rechts lokal-konstant Funktion nach oben halbstetig ist, gilt nach (5), dass f als Abbildung $Y \to Y$ stetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass für $a \in \mathbb{R}$ die Menge $U\colon = f^{-1}((-\infty, a])$ in $\mathcal{O}_<$ liegt. Sei $y \in f^{-1}((-\infty, a])$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $f(x) = f(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x < y + \delta$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y + \delta$ gilt entweder $x \leq y$ und damit $f(x) \leq f(y) \leq a$ oder $y \leq x < y + \delta$ und dann $f(x) = f(y) \leq a$. In beiden Fällen folgt $x \in U$. Nach (2) gilt $U \in \mathcal{O}_<$.