Spieß

1. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 22.10.09

Aufgabe 1. Seien X und Y Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Sind zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ weg-äquivalent, so sind auch die Bilder $f(x_1)$ und $f(x_2)$ weg-äquivalent.

(b) Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $[x] \in \pi_0(X)$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. der Wege-Äquivalenz. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y), [x] \mapsto [f(x)]$ wohldefiniert ist.

(c) Ist $f : X \to Y$ bijektiv, und ist auch die Umkehrabbildung $g = f^{-1} : Y \to X$ stetig, so ist $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ bijektiv.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das halboffene Intervall $(0, 1]$ und $\mathbb{R}$ nicht topologisch äquivalent sind.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Für eine nichtleere Teilmenge A von X and $x \in X$ definieren wir

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

(d.h. $d(x, A)$ ist die kleinste untere Schranke von $\{d(x, a) \mid a \in A\}$). Zeigen Sie, dass $X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ stetig ist. Ist A abgeschlossen (d.h. $X - A$ ist offen), so gilt $d(x, A) = 0$ genau dann wenn $x \in A$.

(b) Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossene, nichtleere, disjunkte Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(A) = \{0\}$ and $f(B) = \{1\}$.