M. Spieß

11. Übung zur Vorlesung Topologie 1

Wintersemester 2009/10 Abgabe: Do, 28.1.2010

Aufgabe 1. Sei $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}\}$. Zeigen Sie, dass X keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

Aufgabe 2. Seien $p_i : Y_i \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$ Überlagerungen und sei $p := p_1 \times \ldots \times p_n : Y_1 \times \ldots \times Y_n \to X_1 \times \ldots \times X_n, (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (p_1(y_1), \ldots, p_n(y_n))$.

(a) Zeigen Sie, dass p eine Überlagerung ist.

(b) Sei G_i die Gruppe der Decktransformationen von p_i und G die Gruppe der Decktransformationen von p. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G_1 \times \ldots \times G_n \to G, (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mapsto \sigma_1 \times \ldots \times \sigma_n$ ein Gruppenisomorphismus ist falls $Y_1, \ldots, Y_n$ wegzusammenhängend sind.

Aufgabe 3. Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung von zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Räumen und sei G die Gruppe der Decktransformationen. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) Es gibt ein $x \in X$, so dass die linke G-Operation auf $p^{-1}(x)$ transitiv ist.

(ii) Für alle $x \in X$ ist die linke G-Operation auf $p^{-1}(x)$ transitiv.

(iii) Es gibt ein $y \in Y$, so dass $p_*(\pi_1(Y, y))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(y))$ ist.

(iv) Für alle $y \in Y$ ist $p_*(\pi_1(Y, y))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(y))$.

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind nennt man p *regulär*.

(Hinweis: Eine Untergruppe H einer Gruppe G heisst Normalteiler falls gilt $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in G$).

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl und sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum dessen Fundamentalgruppe isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist. Wieviele Äquivalenzklassen von Überlagerung $p : Y \to X$ mit wegzusammenhängendem Y gibt es (zwei Überlagerungen $p : Y \to X$, $p' : Y' \to X$

sind dabei äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h : Y \to Y'$ gibt mit $p' \circ h = p$).